Lógica de enunciados

Enric Sesa i Nogueras

PID_00149521



Índice

Introducción

La **lógica de enunciados**, tema de este módulo didáctico, es una parcela, relativamente pequeña y simple, del mundo mucho más amplio de la lógica en general. La medida de sus contenidos y la sencillez de los conceptos que le dan cuerpo la hacen de un interés incuestionable como instrumento que debe permitir abrir puertas hacia las zonas, más complejas, de la lógica de predicados.

Descubriréis en este módulo los fundamentos de unos conceptos teóricos imprescindibles, una reflexión sobre la necesidad de formalismos y unas formas de proceder y encarar el **problema de la validación de razonamientos*** que no son en absoluto ajenas a la forma como los informáticos, y en general los ingenieros, abordan los problemas que dentro de sus especialidades deben resolver.

*** La validación de razonamientos es el plato fuerte de esta asignatura.**

En este módulo didáctico también descubriréis una exposición, seguramente más profunda y detallada, de conceptos que ya se os han presentado en otras asignaturas: tablas de verdad, operadores lógicos, demostraciones por reducción al absurdo, etc.

El tema central de este módulo es la **validación de razonamientos** que se puedan formalizar utilizando el lenguaje de la lógica de enunciados. Sin embargo, antes de poder abordar la tarea de la validación, habrá que conocer este lenguaje y ser diestros en la traducción del lenguaje ordinario a este nuevo lenguaje. Esta traducción, que aquí denominamos **formalización**, es el objetivo prioritario de la primera parte. Finalmente, nos adentraremos en la cuestión de la mecanización de los procesos de validación que se han estudiado anteriormente.

En el texto encontraréis, a menudo, ejemplos. Leedlos y haced, siempre, el esfuerzo de entenderlos. Una vez entendidos no los arrinconéis: intentad rehacerlos por vuestra cuenta, como si fuesen un ejercicio más.

Cuando paséis la última página del módulo y hayáis resuelto con éxito el último ejercicio de autoevaluación, estaréis en condiciones de decidir si es lícito o no afirmar que algo es "lógico".

Objetivos

En los materiales didácticos facilitados en este módulo encontraréis las herramientas indispensables para conseguir los objetivos siguientes:

1. Tener clara la necesidad de un lenguaje formal para poder manipular y razonar sobre la validez o la invalidez de los razonamientos.

2. Saber expresar en el lenguaje de la lógica de enunciados aquellos razonamientos dados en lenguaje natural que son susceptibles de ser formalizados.

3. Tener claro el concepto de consecuencia lógica y su alcance, entendiendo que la lógica no se ocupa del significado sino de la estructura formal.

4. Conocer las reglas de inferencia de la deducción natural y aplicarlas con desenvoltura a la hora de utilizarlas para validar razonamientos, pero siendo también conscientes de sus limitaciones.

5. Darse cuenta del posicionamiento de la lógica con respecto a los conceptos de verdad y falsedad, y del tratamiento que reciben estos conceptos.

6. Poder dar contraejemplos que expliquen, aunque de una manera limitada, la razón por la cual un razonamiento no es formalmente correcto.

7. Manipular algebraicamente enunciados con el fin de expresarlos en alguna forma normal.

8. Conocer el método de resolución, especialmente la modalidad conocida como *resolución lineal*, y comenzar a ser conscientes de las posibilidades de mecanización que ofrece.

1. La lógica de enunciados y su lenguaje

1.1. El objeto de interés de la lógica: los razonamientos

El objeto de estudio de la lógica son los razonamientos. Un **razonamiento** es una secuencia de frases formuladas de tal manera que, de la aceptación de las primeras, parece desprenderse (la aceptación de) la última.

Expresados en lenguaje natural, los razonamientos o argumentos suelen tener una estructura parecida a ésta:

Frase$_1$, ..., frase$_n$. Por tanto, frase$_{n+1}$.

Esta estructura puede variar. Por ejemplo, las palabras *por tanto* pueden sustituirse por construcciones como *entonces*, *consecuentemente*, *en consecuencia*, *se concluye* u otras de valor similar. Incluso, en algunas ocasiones, la palabra o las palabras que marcan el inicio de la conclusión pueden no aparecer, ya que quedan sobreentendidas.

Las n primeras frases de un razonamiento, es decir, todas las que preceden a la última se denominan **premisas**. La última se denomina **conclusión**.

Ejemplos de razonamientos

1) "El domingo el supermercado está cerrado. Hoy el supermercado no está cerrado. Consecuentemente, hoy no es domingo."

2) "La energía cinética aumenta cuando lo hace la velocidad. Cuando la velocidad disminuye, la energía cinética también. Ahora la velocidad permanece inalterable. Tenemos que concluir, pues, que ahora la energía cinética ni aumenta ni disminuye."

Concretamente, la lógica se interesa por estas dos cuestiones: 

1) Los procesos que a partir de premisas permiten llegar a conclusiones correctas*.

* Estas conclusiones correctas son aceptables, sin discusión, si las premisas también son aceptables.

2) La validez de los razonamientos, es decir, la legitimidad de la aceptación de la conclusión cuando se aceptan las premisas.

De hecho, los dos puntos anteriores se pueden ver como uno solo, porque un razonamiento es correcto sólo cuando la obtención de la conclusión se puede hacer siguiendo un proceso de corrección aceptada.

1.2. La necesidad de un lenguaje formal

El lenguaje natural es el vehículo por excelencia de la comunicación de los razonamientos. No obstante, el lenguaje natural, con su gran capacidad expresiva y su riqueza de matices, no es la herramienta más adecuada para el estudio de los razonamientos. La lógica, como otras disciplinas científicas, recurre a la **utilización de un lenguaje formal o simbólico**.

El lenguaje simbólico más simple utilizado por la lógica se denomina **lenguaje de enunciados**. El estudio de los razonamientos expresados utilizando este lenguaje formal corresponde a la **lógica de enunciados**.

Lenguaje natural y lenguaje formal

Por lenguaje natural se debe entender el que se utiliza en la vida cotidiana, tanto en forma escrita como en forma oral. La lengua materna de cada uno es el mejor ejemplo de lenguaje natural.

Los **lenguajes formales** son construcciones artificiales que se han creado para responder a las necesidades peculiares de un área de conocimiento.

1.3. Los elementos básicos del lenguaje de enunciados: átomos y conectivas

El lenguaje de la lógica de enunciados se apoya sobre dos pilares básicos y fundamentales: los **átomos** y las **conectivas**. Los átomos son las unidades más simples de este lenguaje, mientras que las conectivas son los elementos que permiten obtener unidades más complejas a partir de otras más elementales.

1) Los átomos

Un átomo es la formalización de una frase declarativa que no se puede descomponer en otras más simples. Los átomos también se denominan *fórmulas atómicas* o *enunciados simples*.

Por convención, los átomos se representan con letras mayúsculas del alfabeto latino, a partir de la *P*.

Ejemplos

Las frases "Los sapos viven en lugares húmedos", "Las lagartijas comen zanahorias" y "Me gusta escuchar música con la luz apagada" son declarativas porque tiene sentido preguntarse si son verdaderas o falsas. En cambio, frases como "¡Viva el liberalismo!", "¿Te gusta ir a a la playa?" o "Ve a la panadería a comprar medio kg de pan" no son declarativas, ya que no tiene sentido cuestionarse su veracidad.

Hay que remarcar que no es cierto que cualquier tipo de frase se pueda formalizar. El lenguaje de la lógica de enunciados sólo permite formalizar frases declarativas. Una frase es declarativa si tiene sentido cuestionarse su veracidad.

El primer paso en cualquier formalización consiste en detectar las frases declarativas simples y asignar a cada una un símbolo de átomo.

Ejemplo de asignación de símbolos de átomo

Consideremos la frase siguiente:

"Cuando es fiesta y los comercios están autorizados a abrir, entonces las ventas son abundantes si no llueve."

Esta frase daría lugar a la siguiente asignación de símbolos de átomo:

- *P*: es fiesta.
- *Q*: los comercios están autorizados a abrir.
- *R*: las ventas son abundantes.
- *S*: llueve.

2) Las conectivas

Las conectivas son los operadores que permiten construcciones del lenguaje más complejas a partir de construcciones más simples. Las conectivas que se utilizan en esta parte de la asignatura se corresponden, aproximadamente, con las partículas del lenguaje (natural) ‘y’, ‘o’ y ‘no’, y con las construcciones condicionales del tipo “si... entonces...” o “cuando... entonces...”.

Las conectivas se representan con los símbolos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, y $\rightarrow$.

Podemos ver más claramente la representación y el significado de las conectivas en la tabla que presentamos a continuación:

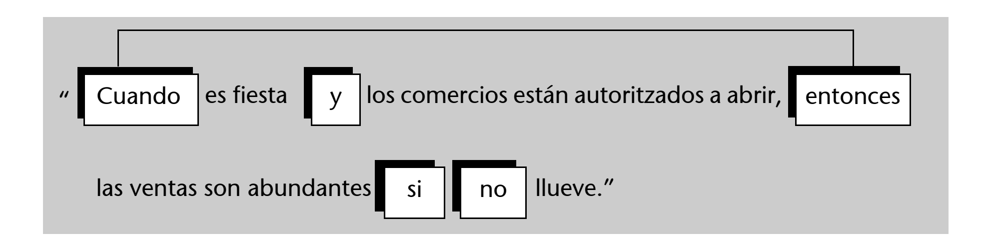
Conectivas			
Símbolo	**Nombre**	**Significado**	**Correspondencia (aproximadamente)**
$\wedge$	Conjunción	‘y’	y, pero
$\vee$	Disyunción	‘o’	o (no exclusiva)
$\neg$	Negación	‘no’	no, nunca, ni
$\rightarrow$	Implicación o condicional	‘si... entonces...’ ‘cuando... entonces...’	si... entonces..., cuando... entonces..., si..., cuando...

Tened presente que el significado que se atribuye a la conectiva $\vee$ no es exclusivo. Esto quiere decir que se corresponde con aquellas construcciones del lenguaje en las que la disyunción tiene un significado de ‘o el uno, o el otro, o los dos’, aunque esto no sea explícito. No se corresponde con aquellas construcciones en las que la disyunción significa ‘o el uno, o el otro, pero no los dos’. Estos últimos tipos de construcciones se tendrán que formalizar utilizando la conectiva $\vee$ y la conectiva $\wedge$.

Siempre que no se indique explícitamente lo contrario, se considera que las disyunciones del lenguaje natural tienen un significado no exclusivo. Los ejemplos que daremos más adelante aclararán esta cuestión.

Ejemplo de detección de conectivas

En la frase del ejemplo anterior se pueden detectar las conectivas siguientes:



1.4. Enunciados

El lenguaje de la lógica de enunciados utiliza como alfabeto el conjunto formado por las letras que designan átomos, las cuatro conectivas que acabamos de definir y los paréntesis de abrir y cerrar.

Las **reglas** siguientes permiten construir enunciados correctamente a partir de los elementos básicos:

1) Todo átomo es un enunciado.
2) Si A es un enunciado, entonces $(\neg A)$ también lo es.
3) Si A y B son enunciados, entonces $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ y $(A \rightarrow B)$ también lo son.
4) Cualquier enunciado se obtiene de la aplicación de las tres reglas anteriores.

Designación de enunciados

Por convención, las primeras letras mayúsculas del alfabeto latino (A, B...) designan enunciados cualesquiera, no necesariamente atómicos, mientras que las letras a partir de la P designan enunciados atómicos.

De todas maneras, muchas veces se utiliza cualquier letra mayúscula del alfabeto latino para designar enunciados atómicos. Esto se hace de esta manera con el fin de poder asignar a cada frase declarativa simple un símbolo de átomo que recuerde su significado (es más fácil recordar que la frase "Yo canto en la ducha" está formalizada con el átomo C, que no con el átomo Q).

A continuación se presentan algunos ejemplos de enunciados correctamente escritos:

- $((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q))$.
- $((P \vee (\neg Q)) \rightarrow (Q \rightarrow P))$.
- $((\neg(P \wedge Q)) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$.

Es fácil darse cuenta de que las cuatro reglas que hemos visto anteriormente conducen a una notación que resulta pesada (debido al exceso de paréntesis). Las convenciones siguientes la hacen más simple: !

1) Asociar la máxima prioridad a la conectiva $\neg$ y la mínima a la conectiva $\rightarrow$. Las conectivas $\wedge$ y $\vee$ tendrán la misma prioridad y ésta estará entra la de $\neg$ y la

de $\rightarrow$. En igualdad de prioridad consideraremos que la asociatividad es de izquierda a derecha.

Algunos autores asocian...

... a la conectiva $\wedge$ una prioridad mayor que a la conectiva $\vee$. En la convención aquí adoptada ambas conectivas tienen la misma prioridad.

2) Eliminar los paréntesis más externos y los que la asignación de prioridades descrita en el punto anterior haga innecesarios. Aunque esta convención permite eliminar muchos de los paréntesis, se tiene absoluta libertad para dejar los que consideremos que mejoran la legibilidad.

Con estas dos convenciones, los ejemplos anteriores podrían haberse escrito de la manera siguiente:

- $P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$.
- $P \vee \neg Q \rightarrow (Q \rightarrow P)$. Notad que esto es diferente de $P \vee \neg Q \rightarrow Q \rightarrow P$ ya que, debido a la asociatividad de izquierda a derecha, en este último enunciado se habrían podido poner los paréntesis del modo siguiente: $((P \vee \neg Q) \rightarrow Q) \rightarrow P$.
- $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$.

Ejemplo de formalización de un enunciado

El ejemplo dado en el subapartado anterior ("Cuando es fiesta y los comercios...") tendría la formalización siguiente (según la asignación de símbolos de átomo dada anteriormente):

$$P \wedge Q \rightarrow (\neg S \rightarrow R).$$

1.5. Otras conectivas

A menudo los textos dedicados a la lógica consideran un número de conectivas mayor que el que se ha dado aquí. Además de las cuatro dadas anteriormente, es habitual que se utilicen las conectivas siguientes:

1) La conectiva $\leftrightarrow$, denominada **bicondicional y que se lee 'si y sólo si'.**

2) La conectiva $\underline{\vee}$, denominada **disyunción exclusiva** y que se utiliza para formalizar las construcciones en las que la disyunción tiene un significado exclusivo ('o el uno, o el otro, pero no los dos').

Recordad que hemos presentado las cuatro conectivas más utilizadas en el subapartado 1.3 de este módulo didáctico.

En este módulo, no utilizaremos estas conectivas de manera explícita, sino que cuando sea necesario formalizar la bicondicional $A \leftrightarrow B$, utilizaremos $(A \rightarrow B) \wedge$ $\wedge (B \rightarrow A)$, y, cuando sea necesario formalizar la disyunción exclusiva $A \underline{\vee} B$, utilizaremos $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$.

1.6. Formalización

1.6.1. Cómo formalizar

Formalizar significa traducir del lenguaje natural al lenguaje propio de la lógica, en este caso al lenguaje de enunciados.

Ya hemos comentado que la riqueza del lenguaje natural lo hace poco adecuado para el estudio de los razonamientos. Por esta razón tenemos que recurrir a la traducción a un lenguaje formal. Como todo proceso de traducción, la formalización nos obligará a prescindir de determinados matices.

A grandes rasgos, para formalizar hay que seguir los pasos siguientes: 

1) Descubrir las frases declarativas simples que constituyen el texto y asignarles un símbolo de átomo a cada una. Habrá que tener presente que:

- Frases que no son sintácticamente simples pueden considerarse simples a la hora de formalizarlas, si no hay ninguna necesidad de descomponerlas en frases menos complejas.
- Frases diferentes pueden tener el mismo significado. En este caso, se les asignará el mismo símbolo de átomo.

2) Detectar las conectivas del lenguaje natural que se corresponden con conectivas del lenguaje de enunciados y reproducir la estructura del texto valiéndose de los átomos previamente asignados. Algunas conectivas pueden estar implícitas.

3) Sustituir las conectivas del lenguaje natural, tanto las explícitas como las implícitas, por conectivas del lenguaje de enunciados.

Ejemplos de formalización

1) Formalizar:

"Si lees superficialmente, no podrás entender lo que se te quiere decir".

Asignamos a la frase "(Tú) lees superficialmente" el símbolo L y a la frase "(Tú) podrás entender lo que se te quiere decir", el símbolo E. Observad que las palabras "si" y "no" no aparecen en las frases a las cuales se ha asignado símbolos de átomo. Esto es así porque son conectivas. La frase se formaliza:

$$L \rightarrow \neg E$$

2) Formalizar:

"Te constiparás o lo pasarás mal, si hace frío y no te abrigas antes de salir a la calle".

Hacemos la siguiente asignación de símbolos de significado a símbolos de átomo: *C*: "(Tú) te constiparás"; *M*: "(Tú) lo pasarás mal"; *F*: "Hace frío"; *A*: "(Tú) te abrigas antes de salir a la calle". Observad que, por claridad, hemos hecho aparecer los sujetos elididos de las frases. La frase se formaliza:

$$(F \wedge \neg A) \rightarrow (C \vee M)$$

3) Formalizar:

"Puedes ir al cine o al concierto (pero no a los dos lugares) y, si tienes tarjeta, puedes comprar las entradas en el cajero automático".

Hacemos las asignaciones *C*: "(Tú) puedes ir al cine"; *M*: "(Tú) puedes ir al concierto"; *T*: "(Tú) tienes tarjeta"; *A*: "(Tú) puedes comprar las entradas en el cajero automático". La frase se formaliza:

$$(C \vee M) \wedge \neg(C \wedge M) \wedge (T \rightarrow A)$$

4) Formalizar:

"Cuando los informáticos hacen bien su trabajo y los clientes hacen peticiones razonables, los directivos se muestran amables con sus subordinados. Cuando los directivos son amables con sus subordinados, los accionistas minoritarios compran más acciones. De todo esto se desprende que si los accionistas minoritarios no compran más acciones, pero los informáticos hacen bien su trabajo, los clientes no hacen peticiones razonables".

A diferencia de los ejemplos anteriores, aquí no se pide formalizar una única frase, sino todo un razonamiento. Después de una lectura completa, se hace la asignación de significado a símbolos de átomo siguiente: *I*: "Los informáticos hacen bien su trabajo"; *C*: "Los clientes hacen peticiones razonables"; *D*: "Los directivos se muestran amables con sus subordinados"; *A*: "Los accionistas minoritarios compran más acciones". El razonamiento se formaliza:

$$I \wedge C \rightarrow D \text{ , } D \rightarrow A \therefore \neg A \wedge I \rightarrow \neg C$$

Conclusión putativa

Entre las premisas y la conclusión se pone el símbolo de conclusión putativa $\therefore$ para marcar el inicio de la conclusión.

Prestad atención a los aspectos siguientes de esta formalización:

- Se ha considerado que las frases "Los directivos se muestran amables con sus subordinados" y "Los directivos son amables con sus subordinados" tienen el mismo significado y, por este motivo, han sido formalizadas con el mismo átomo.

- La locución "De todo esto se desprende que" marca el inicio de la conclusión y por ello no forma parte de ningún átomo. Se ha formalizado con el símbolo de conclusión putativa ($\therefore$).

5) Formalizar:

"Si los profesores tienen ganas de enseñar y los estudiantes se esfuerzan por aprender, los objetivos se alcanzan con facilidad. Cuando los objetivos se alcanzan con facilidad y los recursos son suficientes, el ambiente es inmejorable. Por lo tanto, si el ambiente no es inmejorable, no pasa que los profesores tengan ganas de enseñar y los estudiantes se esfuercen por aprender".

Asignamos *K*: "Los profesores tienen ganas de enseñar y los estudiantes se esfuerzan por aprender"; *O*: "Los objetivos se alcanzan con facilidad"; *R*: "Los recursos son suficientes"; *A*: "El ambiente es inmejorable". El razonamiento se formaliza:

$$K \rightarrow O \text{ , } O \wedge R \rightarrow A \therefore \neg A \rightarrow \neg K$$

Los siguientes aspectos de esta formalización son relevantes:

- El átomo "Los profesores tienen ganas de enseñar y los estudiantes se esfuerzan por aprender" no es, desde un punto de vista puramente sintáctico, una oración simple. Ahora bien, en este razonamiento, las dos cosas (que unos tengan ganas de enseñar y los otros se esfuercen por aprender) van siempre juntas. Por esta razón se ha podido optar por asignar a esta frase un único símbolo de átomo.

- De todos modos, también habría sido totalmente correcto definir *P*: "Los profesores tienen ganas de enseñar"; *E*: "Los estudiantes se esfuerzan por aprender". La formalización, en este caso, sería: $P \wedge E \rightarrow O$, $O \wedge R \rightarrow A$ $\therefore$ $\neg A \rightarrow \neg(P \wedge E)$.

- En diferentes puntos, la coma (,) se utiliza como sustituto de la palabra "entonces".

- La expresión "por lo tanto" marca el inicio de la conclusión del razonamiento.

- La construcción "no pasa que..." ha sido considerada equivalente a "no...".

Algunos consejos

Cuando formalicéis, os pueden ser útiles los consejos siguientes: 

a) Leed atentamente todo lo que debe formalizarse e identificad sus átomos (enunciados que consideraréis atómicos). Vigilad que el significado que asignéis a cada átomo no contenga palabras que denoten conectivas. Además, procurad que el significado asignado a cada átomo tenga un sentido positivo; el sentido negativo se obtendrá con la conectiva "¬".

Identificación correcta de los átomos

Para formalizar: "Si llueve muy fuerte, entonces no saldremos de casa", no hagáis la asignación *P*: "Si llueve muy fuerte"; *Q*: "entonces no saldremos de casa". Lo correcto sería: *P*: "Llueve muy fuerte"; *Q*: "Saldremos de casa".

b) Prestad atención a la puntuación del texto (comas, puntos, etc.). Muchas veces la puntuación sustituye alguna conectiva del lenguaje natural y, muchas otras, indica la forma correcta de poner los paréntesis.

Importancia de la puntuación

No es lo mismo "Piensa y discute, cuando conoce el tema" que "Piensa, y discute cuando conoce el tema". Con *P*: "(Él) piensa"; *D*: "(Él) discute"; *C*: "(Él) conoce el tema", la formalización de la primera frase sería $C \rightarrow P \wedge D$, mientras que la de la segunda sería $P \wedge (C \rightarrow D)$.

c) Prestad atención a la utilización de la conectiva "→". Aunque pueda parecer simple, lo cierto es que buena parte de los errores en la formalización se deben a un mal uso de esta conectiva.



El subapartado 1.6.2 de este módulo se dedicará a la conectiva →. Allí os será más fácil entender por qué estas dos frases no tienen la misma formalización.

Uso de la conectiva "→"

La frase "Si están secas, las hojas caen de los árboles" no tiene el mismo significado ni la misma formalización que la frase "Sólo si están secas, las hojas caen de los árboles". Con *S*: "Las hojas están secas"; *C*: "Las hojas caen de los árboles", la formalización de la primera frase sería $S \rightarrow C$, mientras que la de la segunda sería $C \rightarrow S$.

d) No hagáis demasiadas suposiciones sobre lo que se quiere decir y concentraos en lo que se dice. Intentad no añadir nada derivado de vuestro conocimiento del tema que trata lo que formalizáis (y, puesto que esto no siempre es posible, intentad que vuestras suposiciones y añadidos sean conscientes e intencionados).

Evitar las interpretaciones

La frase "Cuando los índices de audiencia suben, la publicidad se encarece. Y cuando los índices de audiencia bajan, la calidad de las series es muy pobre" se puede formalizar:

- *P*: "Los índices de audiencia suben"; *C*: "La publicidad se encarece"; *B*: "Los índices de audiencia bajan"; Q: "La calidad de las series es muy pobre":

$$(P \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow Q)$$

- *P*: "Los índices de audiencia suben"; *C*: "La publicidad se encarece"; *Q*: "La calidad de las series es muy pobre":

$$(P \rightarrow C) \wedge (\neg P \rightarrow Q)$$

En el segundo caso se ha decidido entender que "Los índices de audiencia bajan" es la negación de "Los índices de audiencia suben". Ésta puede ser una buena interpretación, o no serlo, dependiendo del razonamiento que se estudie. En todo caso, hay que ser consciente de ello.

1.6.2. La utilización de la implicación

La implicación (la conectiva "→") se utiliza para formalizar condiciones. El lenguaje natural permite expresar dos tipos de condiciones:

> **Observación**
>
> La parte izquierda de una implicación se denomina *antecedente* y la parte derecha *consecuente*.

1) **Condiciones suficientes**. Expresan que algo es una condición suficiente para otra cosa.

Ejemplos de condiciones suficientes

- "Si como me reanimo". Que coma es condición suficiente para que me reanime.
- "Cuando los zapatos son nuevos, me hacen daño". Que los zapatos sean nuevos es suficiente para que me hagan daño.
- "Siempre que trabaja, su jefe lo felicita". Que trabaje es suficiente para que su jefe lo felicite.
- "Corto el bacalao si el jefe no está y los otros me dejan". Que el jefe no esté y los otros me dejen es condición suficiente para que corte el bacalao.
- "Tengo escalofríos y dolor de cabeza cuando como queso". Que coma queso es suficiente para tener escalofríos y dolor de cabeza.
- "Basta con que piense que es peligroso para se quede en casa". Que piense que es peligroso es suficiente para que se quede en casa.

Por regla general, las construcciones del estilo "si ... entonces ...", "... si ...", "cuando ... entonces ...", "siempre que ...", "... siempre que", "basta con que... para que...", etc., expresan una condición suficiente. Ahora bien, hay que tener en cuenta que el lenguaje natural es muy rico y que, por lo tanto, ofrece otras formas de expresar el mismo tipo de condición.

2) **Condiciones necesarias**. Aquellas que expresan que algo es una condición necesaria para otra cosa.

Ejemplos de condiciones necesarias

- "Debes tener dinero para poder ir a esquiar". Tener dinero es necesario para poder ir a esquiar.
- "Sólo siendo feliz podrás vivir muchos años". Ser feliz es necesario para vivir muchos años.

- "Para ganar debes ser hábil y tener suerte". Ser hábil y tener suerte es necesario para ganar.
- "Para reanimarme debo comer". Comer es necesario para reanimarme.
- "Es necesario que llueva para tener buenas cosechas".

Habitualmente, las condiciones necesarias se expresarán con construcciones como por ejemplo "se debe ... para ...", "sólo ...", "sólo cuando ...", "es necesario que ... para ...".

También se pueden encontrar condiciones necesarias y suficientes. Estas condiciones no son más que la conjunción de una condición necesaria y una condición suficiente.

Ejemplo de condición necesaria y suficiente

La frase "Hiela si, y sólo si, la temperatura es muy baja" es equivalente a la conjunción de las dos condiciones: "Si la temperatura es muy baja, hiela" y "Sólo hiela si la temperatura es muy baja".

El primer paso para poder formalizar correctamente las condiciones es saberlas distinguir. Después, hay que tener claro el significado que la lógica de enunciados otorga a la conectiva "→".

$A \to B$ significa que 'A es suficiente para B', que 'Basta con tener A para tener B', que 'Cuando se tiene A, seguro que se tiene B'. En ningún caso se excluye la posibilidad de que se dé B sin que se dé A.

Frente a $A \to B$ es lícito afirmar que cuando se dé A, se dará B; pero no es lícito afirmar que cuando se dé B se dará A.

Ejemplos de frases que expresan condiciones suficientes

Las formalizaciones de las frases que antes se han dado como ejemplos de condiciones suficientes serían:

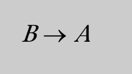
- "Si como me reanimo"
  C: "(Yo) como"; R: "(Yo) me reanimo": $C \to R$
- "Cuando los zapatos son nuevos me hacen daño"
  N: "Los zapatos son nuevos"; D: "Los zapatos me hacen daño": $N \to D$
- "Siempre que trabaja, su jefe lo felicita"
  T: "(Él) trabaja"; F: "Su jefe lo felicita": $T \to F$
- "Corto el bacalao si el jefe no está y los otros me dejan"
  B: "(Yo) corto el bacalao"; C: "El jefe está"; O: "Los otros me dejan (cortar el bacalao)": $\neg C \wedge O \to B$
- "Tengo escalofríos y dolor de cabeza cuando como queso"
  E: "(Yo) tengo escalofríos"; D: "(Yo) tengo dolor de cabeza"; Q: "(Yo) como queso": $Q \to E \wedge D$
- "Basta con que piense que es peligroso para que se quede en casa"
  P: "(Él) piensa que es peligroso"; C: "(Él) se queda en casa": $P \to C$

Ninguna frase con el significado 'A es necesario para B' puede ser formalizada $A \to B$ porque 'A es necesario para B' no es lo mismo que 'A es suficiente para B'. Sin embargo, 'A es necesario para B' puede ser expresado en términos de una condición suficiente, de una de estas dos formas:

a) Cuando decimos que '*A* es necesario para *B*' expresamos que 'sin *A* no se tiene *B*' o, lo que es lo mismo, que la ausencia de *A* es suficiente para la ausencia de *B*'. Esto nos lleva a la formalización siguiente:

$$\neg A \to \neg B$$

b) Cuando decimos que '*A* es necesario para *B*' expresamos que 'la presencia de *B* es suficiente para la presencia de *A*' (si '*A* es necesario para *B*', es seguro que cuando se dé *B*, también se dará lo que es necesario para tenerlo, es decir, *A*). Esto nos lleva a la formalización:



Formalizaciones

Las formalizaciones $\neg A \to \neg B$ y $B \to A$ son totalmente equivalentes. Cualquiera de las dos puede utilizarse para formalizar '*A* es necesario para *B*'.

Ejemplos de frases que expresan condiciones necesarias

Las formalizaciones de las frases que antes se han dado como ejemplos de condiciones necesarias serían:

- "Hay que tener dinero para poder ir a esquiar"
  D: "(Tú) tienes dinero"; *E*: "(Tú) vas (puedes ir) a esquiar": $\neg D \to \neg E$, o también $E \to D$
- "Sólo siendo feliz puedes vivir muchos años"
  F: "(Tú) eres feliz"; *V*: "(Tú) vives (puedes vivir) muchos años": $\neg F \to \neg V$, o también $V \to F$
- "Para ganar debes ser hábil y tener suerte"
  G: "(Tú) ganas"; *H*: "(Tú) eres hábil"; *S*: "(Tú) tienes suerte": $\neg(H \wedge S) \to \neg G$, o también $G \to H \wedge S$
- "Para reanimarme debo comer"
  C: "(Yo) como"; *R*: "(Yo) me reanimo": $\neg C \to \neg R$, o también $R \to C$
- "Es necesario que llueva para tener buenas cosechas"
  L: "Llueve"; *B*: "Se tiene buenas cosechas": $\neg L \to \neg B$, o también $B \to L$

Lo que la implicación no expresa

Hay que tener cuidado de no atribuir a la conectiva "→" significados que no tiene. Concretamente, la implicación no expresa lo siguiente:

- Relaciones causa-efecto: $A \to B$ no permite afirmar ni que *A* sea la causa de *B*, ni que no lo sea. Tampoco permite afirmar que *B* sea la causa de *A*, ni lo contrario.

- Relaciones temporales: $A \to B$ no permite afirmar que *A* preceda en el tiempo a *B*. Sin embargo, tampoco permite afirmar lo contrario.

¿Llueve porque me pongo la gabardina?

La frase "Cuando me pongo la gabardina, llueve" con *G*: "(Yo) me pongo la gabardina", *L*: "Llueve" la formalizamos $G \to L$ porque *G* es condición suficiente para *L*. Si pensáramos en términos de relaciones causales (seguramente me pongo la gabardina a causa de

la lluvia) o de relaciones temporales (primero veo que llueve, después me pongo la gabardina) podríamos estar tentados de hacer su formalización errónea $L \rightarrow G$.

1.6.3. Formalización de frases complejas

En ocasiones podemos encontrarnos con frases de formalización difícil de encontrar. Con frecuencia son frases que requieren más de una implicación. En estos casos puede sernos muy útil aplicar la conocida técnica de reducir un problema complejo a una colección de problemas más simples. Las soluciones de los problemas más simples se podrán combinar para obtener la solución del problema inicial. Unos pocos ejemplos nos ayudarán a ver de qué manera podemos aplicar esta técnica a la formalización:

La reducción de problemas

Resolver un problema complejo descomponiéndolo en una colección de problemas menos complejos –que también pueden descomponerse en otros todavía más simples– es una técnica muy utilizada en el campo de la algorítimica y la programación y que se os presentará bajo nombres como por ejemplo *análisis descendente*, *técnica de los refinamientos sucesivos* o anglicismos como *top-down analysis* o *divide & conquer.*

1) Formalizar la frase:

"Cuando tienes recursos lo bastante potentes y no te faltan conocimientos técnicos, consigues unos resultados espectaculares siempre que los directivos te dan apoyo."

La asignación de significado a símbolos de átomo será T: "(Tú) tienes recursos lo bastante potentes"; M: "Te faltan conocimientos técnicos"; R: "(Tú) consigues unos resultados espectaculares"; D: "Los directivos te dan apoyo". Observad que en ningún caso el significado atribuido a cada átomo contiene palabras que expresen conectiva ("cuando", "y", "no", "siempre").

Globalmente, la frase expresa una condición suficiente porque:

- "Tienes recursos lo bastante potentes y no te faltan conocimientos técnicos" es la condición suficiente para:

- "Consigues unos resultados espectaculares siempre que los directivos te dan apoyo".

Si denominamos X a la formalización de la primera fase e Y a la de la segunda, la formalización de la frase entera será $X \rightarrow Y$. Acabamos de reducir el problema de formalizar toda la frase a formalizar dos frases más sencillas:

a) La frase "Tienes recursos lo bastante potentes y no te faltan conocimientos técnicos" es una conjunción que formalizamos $T \wedge \neg M$. Esto es lo que se había denominado X.

b) La frase "Consigues unos resultados espectaculares siempre que los directivos te apoyan" expresa una condición suficiente porque:

- "Los directivos te dan apoyo" es suficiente para:
- "Consigues unos resultados espectaculares".

Luego, su formalización es $D \rightarrow R$. Esto es lo que se había denominado Y.

c) La formalización de toda la frase es:

$$(T \wedge \neg M) \rightarrow (D \rightarrow R)$$

2) Formalizar la frase:

"Si para desarrollar el programa le es necesario utilizar una herramienta muy sofisticada, entonces no podrá probarlo en casa del cliente si éste tiene una instalación anticuada".

La asignación de significado a símbolos de átomo será D: "(Él) desarrolla el programa"; S: "(Él) utiliza una herramienta muy sofisticada"; P: "(Él) prueba (puede probar) el programa en casa del cliente"; A: "El cliente tiene una instalación anticuada".

Igual que en el ejemplo anterior, ningún significado atribuido a un átomo contiene palabras susceptibles de llegar a ser conectivas. También os podéis dar cuenta de que ha sido necesario modificar la forma de expresar algunos elementos de la frase. De este modo, no se asigna a D: "Desarrollar el programa", sino "(Él) desarrolla el programa". El significado se corresponde con una frase declarativa.

En su totalidad, la frase expresa una condición suficiente porque:

- "Para desarrollar el programa le es necesario utilizar una herramienta muy sofisticada" es suficiente para:

- "(Él) no podrá probar el programa en casa del cliente, si éste tiene una instalación anticuada".

Igual que antes, denominaremos X a la formalización de la primera frase e Y a la de la segunda. La formalización de la frase completa será $X \rightarrow Y$:

a) La primera frase expresa una condición necesaria porque:

- "Utilizar una herramienta muy sofisticada" ("Él utiliza una herramienta muy sofisticada") es condición necesaria para:

- "Desarrollar el programa" ("Él desarrolla el programa").

La formalización de esta parte (X) será: $\neg S \rightarrow \neg D$ (o también: $D \rightarrow S$).

b) La segunda frase expresa una condición suficiente por el hecho siguiente.

- "El cliente tiene una instalación anticuada" es condición suficiente para:

- "(Él) no podrá probar el programa en casa del cliente".

Luego, la formalización de esta segunda parte (*Y*) será: $A \rightarrow \neg P$.

c) La formalización completa de la frase es:

$$(\neg S \rightarrow \neg D) \rightarrow (A \rightarrow \neg P)$$

3) Formalizar la frase:

"Conozco el problema, me han explicado su solución o la he leído en un libro, pero debo tener mucha concentración y un poco de inspiración para poderlo resolver, cuando estoy en un examen".

Asignamos los siguientes significados a símbolos de átomo, *C*: "(Yo) conozco el problema; *E*: "(Ellos, los que sean) me han explicado la solución del problema"; *L*: "(Yo) he leído en un libro la solución del problema"; *K*: "(Yo) tengo mucha concentración"; *I*: "(Yo) tengo un poco de inspiración"; *R*: (Yo) resuelvo el problema"; *P*: "(Yo) estoy en un examen".

La totalidad de la frase es una conjunción de la forma $X \wedge Y$, donde *X* es la formalización de "Conozco el problema, me han explicado su solución o la he leído en un libro" e *Y* es la formalización de "Debo tener mucha concentración y un poco de inspiración para poder resolver el problema, cuando estoy en un examen":

a) La formalización de la parte denominada *X* es $C \wedge (E \vee L)$. Observad que aquí la coma tiene valor de conjunción.

b) La formalización de la parte denominada *Y* es la de una frase que expresa una condición suficiente porque:

- "Estoy en un examen" (*P*) es suficiente para:

- "Debo tener mucha concentración y un poco de inspiración para poder resolver el problema".

Formalizaremos esta condición como $P \rightarrow Z$, donde *Z* será la formalización de "Debo tener mucha concentración y un poco de inspiración para resolver el problema". Esta frase expresa una condición necesaria porque:

- "Yo tengo mucha concentración y un poco de inspiración" ($K \wedge I$) es necesario para:

- "Yo resuelvo el problema" (*R*).

De este modo, la formalización de esta condición necesaria es $R \rightarrow K \wedge I$ –también sería correcto $\neg(K \wedge I) \rightarrow \neg R$).

c) Finalmente, la formalización de toda la frase es:

$$[C \wedge (E \vee L)] \wedge [P \rightarrow (R \rightarrow K \wedge I)]$$

4) Formalizar la frase:

> "Es necesario que cuando haya medios se construyan buenas infraestructuras, para garantizar el crecimiento cuando los indicadores son favorables".

Asignamos los siguientes significados a símbolos de átomo *M*: "Hay medios"; *C*: "Se construyen buenas infraestructuras"; *G*: "Se garantiza el crecimiento"; *F*: "Los indicadores son favorables".

En su totalidad, la frase expresa una condición necesaria porque:

- "Cuando hay medios se construyen buenas infraestructuras" (*X*) es necesario para:
- "Se garantiza el crecimiento cuando los indicadores son favorables" (*Y*).

De este modo, la formalización de la frase será $Y \rightarrow X$:

a) *X* es la formalización de "Cuando hay medios se construyen buenas infraestructuras". Se trata de una condición suficiente que se formaliza $M \rightarrow C$.

b) *Y* es la formalización de "Se garantiza el crecimiento cuando los indicadores son favorables". Se trata de otra condición suficiente que se formaliza $F \rightarrow G$.

c) Finalmente, la formalización de la frase es:

$$(F \rightarrow G) \rightarrow (M \rightarrow C)$$

5) Formalizar la frase:

> "No es necesario que tenga mucho dinero para poder comprar un coche nuevo, si cuando va al banco el director de la oficina le atiende personalmente."

La asignación de significado a símbolos de átomo es *D*: "(Él) tiene mucho dinero"; *C*: "(Él) compra (puede comprar) un coche nuevo"; *B*: "(Él) va al banco"; *O*: "El director de la oficina le atiende personalmente".

De forma global, la frase expresa una condición suficiente porque:

- "Cuando (él) va al banco, el director de la oficina le atiende personalmente" es suficiente para:
- "No es necesario que tenga mucho dinero para poder comprar un coche nuevo".

La frase se formalizará como $Y \to X$, donde:

- Y es la formalización de “Cuando (él) va al banco, el director de la oficina le atiende personalmente”.

- X es la formalización de “No es necesario que tenga mucho dinero para poder comprar un coche nuevo”.

a) La primera frase expresa una condición suficiente y se formaliza $B \to O$.

b) La segunda frase es la negación de una condición necesaria. Su formalización será $\neg X$, donde X es la formalización de “Debes tener mucho dinero para poder comprar un coche nuevo”. Esta última frase se formaliza $\neg D \to \neg C$.

c) Luego, la formalización de toda la frase es:

$$(B \to O) \to \neg(\neg D \to \neg C)$$

2. La deducción natural

2.1. La validación de razonamientos

A partir de una primera definición se introducirán matices hasta llegar a una precisa y definitiva.

El **objetivo de la validación de razonamientos** es dictaminar si la conclusión se desprende o no de las premisas, es decir, dictaminar si la aceptación de las premisas comporta, ineludiblemente, la aceptación de la conclusión.

Una vez formalizado, un razonamiento se expresa de la manera siguiente:

$$enunciado_1, \ldots, enunciado_p \therefore enunciado_{p+1},$$

donde tenemos que:

- $enunciado_1, \ldots, enunciado_p$, son el resultado de la formalización de las premisas,
- $enunciado_{p+1}$, es el resultado de la formalización de la conclusión,
- el símbolo ∴ indica que lo que viene a continuación es una conclusión de la que todavía no se tiene garantía de que sea legítima*.

* Denominada *conclusión putativa.*

Ejemplo de razonamiento formalizado

Consideramos el razonamiento siguiente:

"El domingo el supermercado estará cerrado. Hoy el supermercado no está cerrado. Consecuentemente, hoy no es domingo."

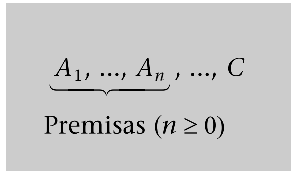
Si asignamos D a "es domingo" y C a "el supermercado está cerrado", entonces, una vez formalizado, este razonamiento quedaría como mostramos a continuación:

$$D \to C, \neg C \therefore \neg D$$

Validar un razonamiento significa demostrar que el paso de las premisas a la conclusión es legítimo. Un razonamiento es válido cuando el paso de las premisas a la conclusión puede hacerse siguiendo una serie de reglas previamente aceptadas. Las reglas aceptadas para pasar de unas premisas a una conclusión se denominan **reglas de inferencia** o **reglas de deducción**.

Una **deducción** es una secuencia de enunciados, los cuales o bien son premisas, o bien se han obtenido de la aplicación de un conjunto finito de reglas de inferencia a enunciados anteriores (que le preceden en la secuencia).

Cuando una deducción tiene la forma explicitada a continuación:



$$\underbrace{A_1, ..., A_n}_{\text{Premisas } (n \geq 0)}, ..., C$$

entonces se dice que es una demostración del último enunciado (C) a partir de las premisas (A_1, ..., A_n). El hecho de que C sea demostrable a partir de las premisas A_1, ..., A_n se nota de la manera siguiente:

$$A_1, ..., A_n \vdash C$$

Validar un razonamiento quiere decir construir una deducción que, partiendo de las premisas dadas, llegue a la conclusión o, lo que es lo mismo, que sea una demostración de la conclusión.

El significado de los símbolos

El símbolo $\vdash$ puede leerse 'permite deducir', 'se desprende de ello', 'da', 'se sigue de ello', etc. El significado de los símbolos $\therefore$ y $\vdash$ es diferente. El símbolo $\therefore$ indica que lo que viene a continuación es la conclusión del razonamiento, mientras que $\vdash$ indica que lo que va a continuación es una conclusión válida de las premisas del razonamiento.

2.2. Notación y reglas de la deducción natural

La **deducción natural** es un procedimiento para la construcción de demostraciones. Se trabajará con nueve **reglas de inferencia*** básicas que, posteriormente, se ampliarán con nuevas reglas deducidas de las primeras. La deducción natural se denomina así porque las reglas de inferencia utilizadas se corresponden con principios intuitivos.

* Reglas para obtener nuevos enunciados a partir de enunciados anteriores.

Las reglas de la deducción natural se dividen en los dos grupos siguientes:

1) El grupo de las reglas que permiten construir un enunciado haciendo aparecer una determinada conectiva, denominadas **reglas de introducción**.

2) El grupo de las reglas que permiten escribir un nuevo enunciado sin una determinada conectiva, denominadas **reglas de eliminación**.

2.2.1. La notación

La notación que se utiliza para especificar las reglas de inferencia de la deducción natural es la siguiente:

$$\frac{\text{Enunciados necesarios para aplicar la regla}}{\text{Enunciado obtenido de la aplicación de la regla}}$$

Ejemplo

$$\frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{A \wedge B}$$

Con el fin de aplicar estas reglas y construir deducciones se usa la notación que comentaremos a continuación junto con algunos ejemplos que ayudarán a captar la notación:

1) **Escribir las premisas.** En primer lugar, se escriben y se enumeran las premisas, una debajo de la otra.

Por ejemplo, si se quiere construir una deducción a partir de las premisas $P \wedge Q$, $P \rightarrow S$, y $T \rightarrow \neg S$ comenzamos escribiendo:

(1) $P \wedge Q$
(2) $P \rightarrow S$
(3) $T \rightarrow \neg S$

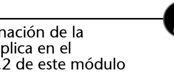
2) **Comentarios a la derecha.** A la derecha de cualquier enunciado se pueden escribir pequeños comentarios que faciliten la lectura. Para el caso concreto de las premisas, el comentario es *P*.

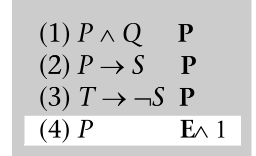
Continuando con el ejemplo del punto anterior, tenemos:

(1) $P \wedge Q$	**P**
(2) $P \rightarrow S$	**P**
(3) $T \rightarrow \neg S$	**P**

3) **Aplicar las reglas.** Cuando se aplica una regla, el enunciado resultante se pone al final de la lista siguiendo la numeración, y como comentario se indica la regla aplicada y el enunciado o enunciados de la lista (su número) a los que se ha aplicado.

Por ejemplo, la regla denominada *eliminación de la conjunción* (**E**$\wedge$) permite obtener *P* a partir de $P \wedge Q$. Para indicar que esta regla se aplica al enunciado 1, se escribe de la manera siguiente:

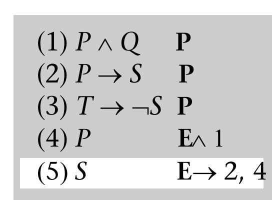

La regla de eliminación de la conjunción se explica en el subapartado 2.2.2 de este módulo didáctico.



(1) $P \wedge Q$	**P**
(2) $P \rightarrow S$	**P**
(3) $T \rightarrow \neg S$	**P**
(4) P	**E**$\wedge$ 1

Otra regla permite obtener *S* a partir de *P* y de $P \rightarrow S$. Esta regla se denomina **E**$\rightarrow$ y en el ejemplo que estamos construyendo es aplicable a los enunciados 4 y 2. El resultado de su aplicación se indica de esta manera:

La regla **E**$\rightarrow$ (eliminación de la implicación) se trata en el subapartado 2.2.2 de este módulo didáctico.



(1) $P \wedge Q$	**P**
(2) $P \rightarrow S$	**P**
(3) $T \rightarrow \neg S$	**P**
(4) P	**E**$\wedge$ 1
(5) S	**E**$\rightarrow$ 2, 4

4) Subdeducciones. En algunas ocasiones es necesario introducir en la deducción enunciados que no están en la lista y que no se pueden obtener mediante la aplicación de ninguna regla. Cuando es necesario hacer esto, se abre una subdeducción encabezada por el enunciado que se quiere introducir.

Por ejemplo, supongamos que se quiere introducir el enunciado T, que no está en ningún lugar de la lista que se ha construido hasta el momento.

(1)	$P \wedge Q$	**P**
(2)	$P \rightarrow S$	**P**
(3)	$T \rightarrow \neg S$	**P**
(4)	P	**E**$\wedge$ 1
(5)	S	**E**$\rightarrow$ 2, 4
(6)	│ T	**H**

Es importante...

... no olvidar la utilización del sangrado dado que, además de facilitar la lectura, evita la introducción de errores.

El enunciado introducido se comenta con **H**, que significa **hipótesis**. A partir del momento en que se inicia una subdeducción hay que continuar introduciendo los nuevos enunciados con el mismo sangrado. De esta manera se indica que lo que se está obteniendo está supeditado a un enunciado que el autor de la deducción ha introducido por razones estratégicas, pero que no es ni una premisa ni nada que se haya obtenido a partir sólo de estas premisas.

En el ejemplo, se puede volver a usar la regla **E**$\rightarrow$, para aplicarla a los enunciados 3 y 6:

(1)	$P \wedge Q$	**P**
(2)	$P \rightarrow S$	**P**
(3)	$T \rightarrow \neg S$	**P**
(4)	P	**E**$\wedge$ 1
(5)	S	**E**$\rightarrow$ 2, 4
(6)	│ T	**H**
(7)	│ $\neg S$	**E**$\rightarrow$ 3, 6

Siempre es posible comenzar una subdeducción. Acabar una y volver al nivel inmediatamente anterior sólo se puede hacer siguiendo alguna de las reglas que lo permiten. !

2.2.2. Las reglas

a) Regla 1: introducción de la conjunción (I$\wedge$)

Si en la lista de enunciados aparecen un enunciado A y un enunciado B (no necesariamente de forma consecutiva) entonces se puede escribir, al final de esta lista, el enunciado $A \wedge B$, o el enunciado $B \wedge A$.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline A \wedge B \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ B \\ \hline B \wedge A \end{array}$$

Ejemplos

- Ejemplos de utilización correcta de la regla de introducción de la conjunción:

(1) P	...
(2) $R \vee Q$	...
(3) $\neg S$	...
(4) $P \wedge \neg S$	**I**$\wedge$ 1, 3
(5) $(R \vee Q) \wedge (P \wedge \neg S)$	**I**$\wedge$ 2, 4

- Ejemplo de utilización incorrecta de la regla de introducción de la conjunción:

(1) P	...
(2) $R \vee Q$	...
(3) $\neg S$	...
(4) $P \wedge Q$	**I**$\wedge$ 1, 2 error

La línea 4 es un error, ya que el enunciado Q no está en las líneas anteriores. Para poder aplicar la regla, ambos enunciados deben aparecer libres en la lista y éste no es el caso de Q (que sólo aparece como parte de $R \vee Q$).

La necesidad de que los enunciados a los que se aplica una regla aparezcan libres es común a todas las reglas de inferencia de la deducción natural.

b) Regla 2: eliminación de la conjunción (E$\wedge$)

Si en una deducción aparece una conjunción, entonces es lícito escribir al final de la lista cualquiera de los conjuntandos.

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Ejemplos

- Ejemplos de utilización correcta de la regla de eliminación de la conjunción:

(1) $T \wedge S$	...
(2) $P \wedge (R \rightarrow S)$	...
(3) $T \rightarrow P \wedge S$	...
(4) $R \wedge T \rightarrow P$	...
(5) $(Q \vee P) \wedge S$	...
(6) S	**E**$\wedge$ 1
(7) $R \rightarrow S$	**E**$\wedge$ 2
(8) $Q \vee P$	**E**$\wedge$ 5
(9) T	**E**$\wedge$ 1

- Ejemplos de utilización incorrecta de la regla de eliminación de la conjunción:

(1) $T \wedge S$	...
(2) $P \wedge (R \to S)$	...
(3) $T \to P \wedge S$	...
(4) $R \wedge T \to P$	...
(5) $(Q \vee P) \wedge S$	...
(6) R	**E**$\wedge$ 4 error
(7) $T \to P$	**E**$\wedge$ 4 error
(8) Q	**E**$\wedge$ 5 error

En las líneas 6 y 7 el error consiste en no tener en cuenta la precedencia de los operadores ($\wedge$ tiene una prioridad superior a la de $\to$). El enunciado $R \wedge T \to P$ no es una conjunción, sino una implicación y, por tanto, la regla no es aplicable.

El error de la línea 8 es del mismo tipo que los dos anteriores: los conjuntandos son $Q \vee P$ y S. La regla permite obtener cualquiera de los conjuntandos, pero no partes de éstos.

c) Regla 3: introducción de la disyunción (I$\vee$)

Si en la lista de enunciados aparece un enunciado A, entonces es legítimo escribir, al final de la lista, $A \vee B$ o $B \vee A$, donde B es un enunciado cualquiera, que no es necesario que aparezca previamente en la lista.

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

Ejemplos

Ejemplos de utilización correcta de la regla de introducción de la disyunción:

(1) P	...
(2) $R \vee Q$	...
(3) $\neg S$	...
(4) $P \vee Q$	**I**$\vee$ 1
(5) $(R \vee Q) \vee T$	**I**$\vee$ 2

d) Regla 4: eliminación de la implicación o *modus ponens* (E$\to$)

Si en algún punto de una deducción aparece una implicación y en algún otro aparece el antecedente de ésta, entonces es legítimo escribir el consecuente al final de la lista.

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \underline{A} \\ B \end{array}$$

Ejemplos

- Ejemplos de utilización correcta de la regla de eliminación de la implicación:

(1) T	...
(2) $T \rightarrow Q$	...
(3) $Q \rightarrow P \wedge S$	...
(4) $S \vee R \rightarrow W$	...
(5) Q	**E**$\rightarrow$ 1, 2
(6) $P \wedge S$	**E**$\rightarrow$ 3, 5
(7) S	**E**$\wedge$ 6
(8) $S \vee R$	**I**$\vee$ 7
(9) W	**E**$\rightarrow$ 4, 8

- Ejemplo de utilización incorrecta. El error más frecuente en la aplicación de esta regla consiste en aplicarla al revés, es decir, obteniendo el antecedente de una implicación cuando se tiene el consecuente:

(1) Q	...
(2) $T \rightarrow Q$	...
(3) T	**E**$\rightarrow$ 1, 2 error

e) Regla 5: Introducción de la implicación (I$\rightarrow$)

Para poder escribir $A \rightarrow B$ hay que abrir una subdeducción encabezada por A (hipótesis) y continuar, en el ámbito de esta subdeducción, hasta llegar al enunciado B. Cuando en la subdeducción se llega a B, entonces $A \rightarrow B$ ya se puede escribir, pero ahora fuera del ámbito de la subdeducción.

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \ldots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

Cuando se ha vuelto al nivel inmediatamente anterior al de la subdeducción, ésta queda clausurada y no es posible utilizar ninguno de los enunciados que contiene. El enunciado $A \rightarrow B$ sí que podrá ser utilizado porque no forma parte de la subdeducción que ha permitido obtenerlo.

Ejemplo

Como ejemplo de utilización correcta de esta regla supongamos que se quiere demostrar que a partir de Q y de P se puede llegar a concluir que $S \rightarrow (P \wedge Q) \vee T$*:

* Se quiere poder afirmar que $Q, P \vdash (P \wedge Q) \vee T$.

(1)	Q	**P**
(2)	P	**P**
(3)	$\quad S$	**H**
(4)	$\quad P \wedge Q$	**I**$\wedge$ 2, 1
(5)	$\quad (P \wedge Q) \vee T$	**I**$\vee$ 4
(6)	$S \rightarrow (P \wedge Q) \vee T$	**I**$\rightarrow$ 3, 5

f) Regla 6: introducción de la negación o reducción al absurdo (I¬)

Para escribir la negación de un enunciado se abre una subdeducción encabezada por éste y se obtiene, dentro de la subdeducción, una pareja formada por un enunciado y su negación. Una vez obtenida esta pareja, la negación del enunciado que encabezaba la subdeducción se puede escribir fuera del ámbito de éste.

$$\begin{array}{l} \quad | \; A \\ \quad | \; \ldots \\ \quad | \; B \\ \quad | \; \ldots \\ \quad | \; \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

La pareja formada por un enunciado y su negación se denomina **contradicción**. Las contradicciones se consideran algo insostenible. Cuando una hipótesis conduce a la aparición de una contradicción esta hipótesis se hace insostenible y se pasa a afirmar (escribir) su negación.

Ejemplo

Un ejemplo de utilización correcta de esta regla es el siguiente:

(1)	$P \rightarrow Q$	...
(2)	$P \rightarrow (Q \rightarrow T)$	...
(3)	$R \wedge \neg S$	...
(4)	$T \rightarrow S$	...
(5)	$\quad P$	**H**
(6)	$\quad \neg S$	**E**$\wedge$ 3
(7)	$\quad Q$	**E**$\rightarrow$ 1, 5
(8)	$\quad Q \rightarrow T$	**E**$\rightarrow$ 2, 5
(9)	$\quad T$	**E**$\rightarrow$ 7, 8
(10)	$\quad S$	**E**$\rightarrow$ 4, 9
(11)	$\neg P$	**I**$\neg$ 5, 6, 10

g) Regla 7: eliminación de la negación (E¬)

Dos negaciones consecutivas se anulan mutuamente.

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Ejemplo

Un ejemplo de aplicación correcta de la regla de eliminación de la negación es el siguiente:

(1)	$\neg P \rightarrow Q \wedge R$	...
(2)	$R \rightarrow \neg Q$	...
(3)	$\mid \neg P$	**H**
(4)	$\mid Q \wedge R$	**E**→ 1, 3
(5)	$\mid R$	**E**∧ 4
(6)	$\mid Q$	**E**∧ 4
(7)	$\mid \neg Q$	**E**→ 2, 5
(8)	$\neg\neg P$	**I**¬ 3, 6, 7
(9)	P	**E**¬ 8

h) Regla 8: eliminación de la disyunción o prueba por casos (E∨)

Para poder eliminar una disyunción es necesario que una subdeducción encabezada por el primero de los disyuntandos acabe con un enunciado y que otra subdeducción encabezada por el segundo disyuntando acabe con el mismo enunciado.

Cuando se verifican estas condiciones, el enunciado que es común a ambas subdeducciones puede, legítimamente, escribirse al final de la lista, fuera del ámbito de las subdeducciones encabezadas por los disyuntandos.

$$
\begin{array}{l}
A \vee B \\
\quad \left| \begin{array}{l} A \\ \hline C \end{array} \right. \\
\quad \left| \begin{array}{l} B \\ \hline C \end{array} \right. \\
\hline
C
\end{array}
$$

Esquemáticamente, la eliminación de la disyunción hay que entenderla así:

* Ante una disyunción no se puede decir cuál de los disyuntandos se da*.
* De la suposición de A, se desprende C.
* De la suposición de B, se desprende C.
* De la disyunción, se desprende C.

* Tenemos $A \vee B$, pero ¿se da A o se da B?

Tened en cuenta que las dos subdeducciones son independientes y que los resultados obtenidos en una no pueden utilizarse en la otra.

Ejemplos

- Como ejemplo de utilización correcta de esta regla se demostrará que, de las premisas $P \vee Q$, $Q \rightarrow T$ y $P \rightarrow S \wedge T$, se desprende la conclusión T:

(1) $P \vee Q$	**P**
(2) $Q \rightarrow T$	**P**
(3) $P \rightarrow S \wedge T$	**P**
(4) | P	**H**
(5) | $S \wedge T$	**E**$\rightarrow$ 3, 4
(6) | T	**E**$\wedge$ 5
(7) | Q	**H**
(8) | T	**E**$\rightarrow$ 2, 7
(9) T	**E**$\vee$ 1, 6, 8

- Por el contrario, un ejemplo de utilización incorrecta de esta regla es el que mostramos a continuación:

(1) $P \vee Q$	**P**
(2) $Q \rightarrow T$	**P**
(3) $P \rightarrow S \wedge T$	**P**
(4) | P	**H**
(5) | $S \wedge T$	**E**$\rightarrow$ 3, 4
(6) | S	**E**$\wedge$ 5
(7) | Q	**H**
(8) | S	**E**$\wedge$ 5 error
(9) S	**E**$\vee$ 1, 6, 8 error*

* El error producido en la línea 9 es debido a un error previo.

La regla no se ha aplicado correctamente: en la línea 8 no se ha respetado la exigencia de no utilizar el resultado de una subdeducción en la otra.

i) Regla 9: iteración (it)

Cualquier enunciado que aparece en una deducción puede volver a ser escrito al final de la lista de enunciados, siempre que la repetición se produzca en el mismo ámbito en el que aparece el enunciado o en el de una subdeducción interna a éste.

$$\frac{A}{A}$$

Hay que tener en cuenta que no es correcto exportar enunciados a un ámbito más externo del ámbito en el que se encuentran*.

* Excepto cuando esta exportación es la autorizada por la regla de eliminación de la disyunción.

En muchas ocasiones esta regla se aplica, en deducciones relativamente largas, para acercar un enunciado aparecido anteriormente al lugar donde se utilizará, de manera que se mejora la legibilidad.

Ejemplos

- Como ejemplo de utilización correcta de esta regla demostramos que, de las premisas $P \vee (S \rightarrow T)$, $R \wedge S$, $Q \wedge W$ y $P \rightarrow T$, se desprende la conclusión $W \wedge T$.

(1)	$P \vee (S \rightarrow T)$		**P**
(2)	$R \wedge S$		**P**
(3)	$Q \wedge W$		**P**
(4)	$P \rightarrow T$		**P**
(5)		P	**H**
(6)		T	E$\rightarrow$ 4, 5
(7)		$S \rightarrow T$	**H**
(8)		$R \wedge S$	**it** 2
(9)		S	E$\wedge$ 8
(10)		T	E$\rightarrow$ 7, 9
(11)	T		E$\vee$ 1, 6, 10
(12)	$Q \wedge W$		**it** 3
(13)	W		E$\wedge$ 12
(14)	$W \wedge T$		I$\wedge$ 11, 13

- En la línea 8 la aplicación de la regla de iteración es correcta porque el enunciado pasa al ámbito de una subdeducción de la deducción principal. También en la línea 12 la aplicación es correcta porque el enunciado se copia en el mismo ámbito.

- Ejemplo de utilización incorrecta de la regla de iteración:

(1)	$P \rightarrow Q \wedge R$		...
(2)		P	**H**
(3)		$Q \wedge R$	E$\rightarrow$ 1, 2
(4)		R	E$\wedge$ 3
(5)	$P \rightarrow R$		I$\rightarrow$ 2, 4
(6)	$Q \wedge R$		**it** 3, error

2.3. Planteamiento estratégico de las demostraciones por deducción natural

Construir una demostración para un razonamiento válido puede llegar a ser una tarea complicada, sobre todo si no se lleva a cabo siguiendo algún planteamiento estratégico. Lo que nunca debe hacerse es aplicar las reglas a ciegas, sin tener muy claro con qué propósito se aplican en cada momento.

El **proceso de demostración** tiene un solo objetivo y es obtener la conclusión del razonamiento. Toda regla debe ser aplicada con el propósito de alcanzar este objetivo.

2.3.1. La conclusión ayuda a plantear la demostración

Dada la importancia de la conclusión en el proceso de demostración, es habitual que la primera etapa del planteamiento de una demostración se base en la forma de la conclusión y, más concretamente, en su conectiva principal:

a) Si la conclusión es una implicación: puede ser útil empezar por una subdeducción encabezada por el antecedente de la implicación e intentar llegar al consecuente dentro del ámbito de esta subdeducción. Entonces, la aplicación de la regla **I**→ permitirá finalizar la demostración.

Esquemáticamente, la demostración de $P_1, ..., P_n \vdash A \to B$ puede plantearse:

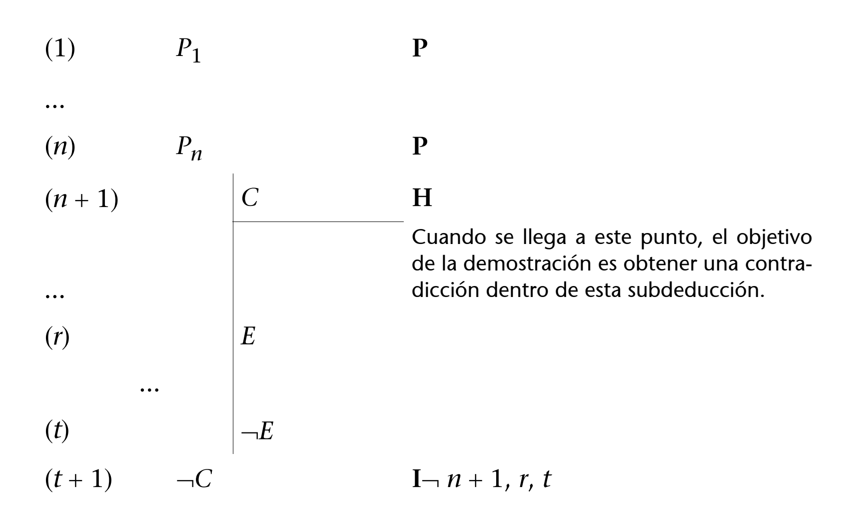
(1)	P_1		**P**
...			
(n)	P_n		**P**
(n + 1)		A	**H**
...			Cuando se llega a este punto, el objetivo de la demostración es obtener B dentro de esta subdeducción.
(t)		B	
(t + 1)	$A \to B$		**I**→ n + 1, t

b) Si la conclusión es una negación: puede ser útil empezar con una subdeducción encabezada por el enunciado de la conclusión sin negar e intentar llegar a una contradicción dentro del ámbito de esta subdeducción. Entonces, la aplicación de la regla **I**¬ permitirá finalizar la demostración.

Contradicciones

Recordad que una contradicción es la pareja formada por un enunciado cualquiera y su negación.

Esquemáticamente, la demostración de $P_1, ..., P_n \vdash \neg C$ puede plantearse:



Aunque la conclusión no sea una negación, este planteamiento también puede ser útil. Si la conclusión es un enunciado cualquiera A, se supone (hipótesis) $\neg A$. Si se llega a una contradicción, la introducción de la negación proporciona $\neg\neg A$ y por aplicación de la eliminación de la negación se obtiene A. Demostrar un enunciado a partir de su negación y la obtención de una contradicción (aplicación de la regla **I**¬) se denomina **reducción al absurdo**.

c) **Si la conclusión es una conjunción**: puede ser útil intentar obtener cada uno de los conjuntandos por separado. Entonces, la aplicación de la regla **I**∧ permitirá finalizar la demostración.

Esquemáticamente, la demostración de $P_1, ..., P_n \vdash A \wedge B$ puede plantearse:

(1)	P_1	**P**
...		
(n)	P_n	**P**
...		A partir de este punto, el objetivo es llegar al enunciado A.
(r)	A	
...		A partir de este punto, el objetivo es llegar al enunciado B.
	B	
(t)		
(t + 1)	$A \wedge B$	**I**∧ r, t

d) **Si la conclusión es una disyunción**: puede ser útil intentar obtener algunos de los disyuntandos. Entonces la aplicación de la regla **I**∨ permitirá finalizar la demostración.

Esquemáticamente, la demostración de $P_1, ..., P_n \vdash A \vee B$ puede plantearse:

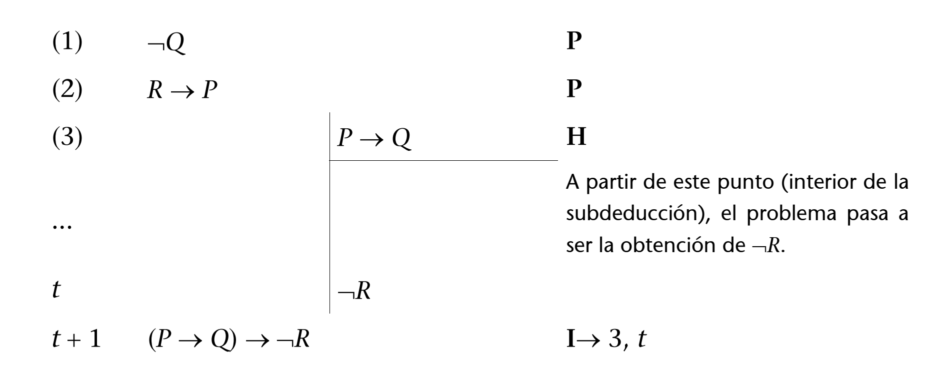
(1)	P_1	**P**
...		
(n)	P_n	**P**
...		A partir de este punto, el objetivo es llegar al enunciado A.
(r)	A	
(t)	$A \vee B$	**I**∨ r

Estos cuatro casos pueden ser útiles para plantear los rasgos generales de la demostración que se quiere conseguir. En todos los casos se ha reducido el problema inicial a uno o más problemas que quizá sean un poco más simples que el original. Para resolver cada uno puede ser necesario descomponerlos en problemas todavía más simples.

Ejemplos

1) Demostrar la validez del razonamiento $\neg Q, R \rightarrow P \therefore (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg R$:

- Ya que la conclusión es una implicación, parece factible intentar plantear la demostración como una aplicación de la regla **I→** :



(1)	$\neg Q$		**P**
(2)	$R \to P$		**P**
(3)		$P \to Q$	**H**
...			A partir de este punto (interior de la subdeducción), el problema pasa a ser la obtención de $\neg R$.
t		$\neg R$	
$t + 1$	$(P \to Q) \to \neg R$		**I→** 3, t

- Dado que queremos obtener una negación y la presencia de R permitirá aplicar la regla **E→** a $R \to P$, puede plantearse la obtención de $\neg R$ como una introducción de la negación (aplicación de la regla **I¬**):

(1)	$\neg Q$			**P**
(2)	$R \to P$			**P**
(3)		$P \to Q$		**H**
(4)			R	**H**
(5)			P	**E→** 2, 4
(6)			Q	**E→** 3, 5
(7)			$\neg Q$	**it** 1
(8)		$\neg R$		**I¬** 4, 6, 7
(9)	$(P \to Q) \to \neg R$			**I→** 3, 8

2) Demostrar la validez del razonamiento $P \to T$, $(R \to P) \to \neg T \therefore \neg(P \wedge R)$:

- El hecho de que la conclusión sea una negación puede sugerir plantear la demostración como una aplicación de la regla **I¬**:

(1)	$P \to T$		**P**
(2)	$(R \to P) \to \neg T$		**P**
(3)		$P \wedge R$	**H**
...			En el ámbito de esta subdeducción, el problema pasa a ser la obtención de una contradicción.
(r)		E	
...			
(t)		$\neg E$	
($t + 1$)	$\neg(P \wedge R)$		**I¬** 3, r, t

- ¿Qué contradicción se podrá obtener? ¿Cuál será el enunciado E? El hecho de que el consecuente de la primera premisa sea T y el de la segunda $\neg T$, nos puede llevar a pensar en esta pareja de enunciados. Además, es fácil observar que la obtención de T será sencilla porque disponemos de P en el encabezamiento de la subdeducción:

(1)	$P \to T$		**P**
(2)	$(R \to P) \to \neg T$		**P**
(3)		$P \wedge R$	**H**
(4)		P	**E**$\wedge$ 3
(5)		T	**E**$\to$ 1, 4
…			Queda pendiente de ser resuelto el problema de obtener $\neg T$.
(t)		$\neg T$	
(t + 1)	$\neg(P \wedge R)$		**I**$\neg$ 3, 5, t

- Obtener $\neg T$ sería inmediato si se dispusiera de $R \to P$ (antecedente de la implicación que tiene $\neg T$ por consecuente). Es posible fijarse como nuevo objetivo la obtención de $R \to P$. Dado que $R \to P$ es una implicación, puede plantearse su obtención como una aplicación de la regla **I**$\to$:

(1)	$P \to T$			**P**
(2)	$(R \to P) \to \neg T$			**P**
(3)		$P \wedge R$		**H**
(4)		P		**E**$\wedge$ 3
(5)		T		**E**$\to$ 1, 4
(6)			R	**H**
(7)			P	**it** 4. El problema se había reducido a la obtención de P en el ámbito de esta subdeducción.
(8)		$R \to P$		**I**$\to$ 6, 7
(9)		$\neg T$		**E**$\to$ 2, 8
(10)	$\neg(P \wedge R)$			**I**$\neg$ 3, 5, 9

2.3.2. Las premisas ayudan a plantear la demostración

Aunque la forma de la conclusión permite muchas veces decidir un buen planteamiento inicial de la demostración, no hay que olvidar las premisas. Al fin y al cabo, éstas proporcionan los enunciados necesarios para alcanzar la conclusión. La forma de las premisas también nos puede orientar:

Otras ayudas

También los enunciados que encabezan subdeducciones –si son accessibles– y otros obtenidos de las premisas pueden ser útiles a la hora de plantear una demostración.

a) **Si en las premisas aparecen implicaciones**: puede ser interesante preguntarse si la obtención de alguno de los consecuentes proporcionará algún enunciado útil. Dado que para obtener los consecuentes de las implicaciones hay que tener sus antecedentes (y aplicar la regla **E**$\to$), será necesario ver si se dispone de estos antecedentes, o si es posible obtenerlos.

b) Si en las premisas aparecen conjunciones: puede ser interesante preguntarse si la aplicación de la regla **E**$\wedge$ proporcionará algún enunciado útil.

c) Si en las premisas aparecen disyunciones: puede ser interesante preguntarse si la aplicación de la regla **E**$\vee$ puede ser útil. En este caso se puede plantear toda la demostración –o la parte que convenga– como una prueba por casos. Esquemáticamente, la demostración de $A \vee B, ..., P_n \vdash C$ puede plantearse:

1	$A \vee B$		**P**
...			
(n)	P_n		**P**
$(n + 1)$		A	**H**
...			Cuando se llega a este punto, el objetivo de la demostración es obtener C dentro de esta subdeducción.
(p)		C	
$(p + 1)$		B	**H**
...			Cuando se llega a este punto, el objetivo de la demostración es obtener C dentro de esta subdeducción.
(q)		C	
$(q + 1)$	C		**E**$\vee$ 1, p, q

De hecho, no es necesario que cada subdeducción acabe con el enunciado C (la conclusión). También puede pasar que las dos acaben con cualquier otro enunciado que permita obtener C. Lo que sí que debe pasar es que las dos subdeducciones finalicen con el mismo enunciado porque, de otro modo, la regla **E**$\vee$ no sería aplicable.

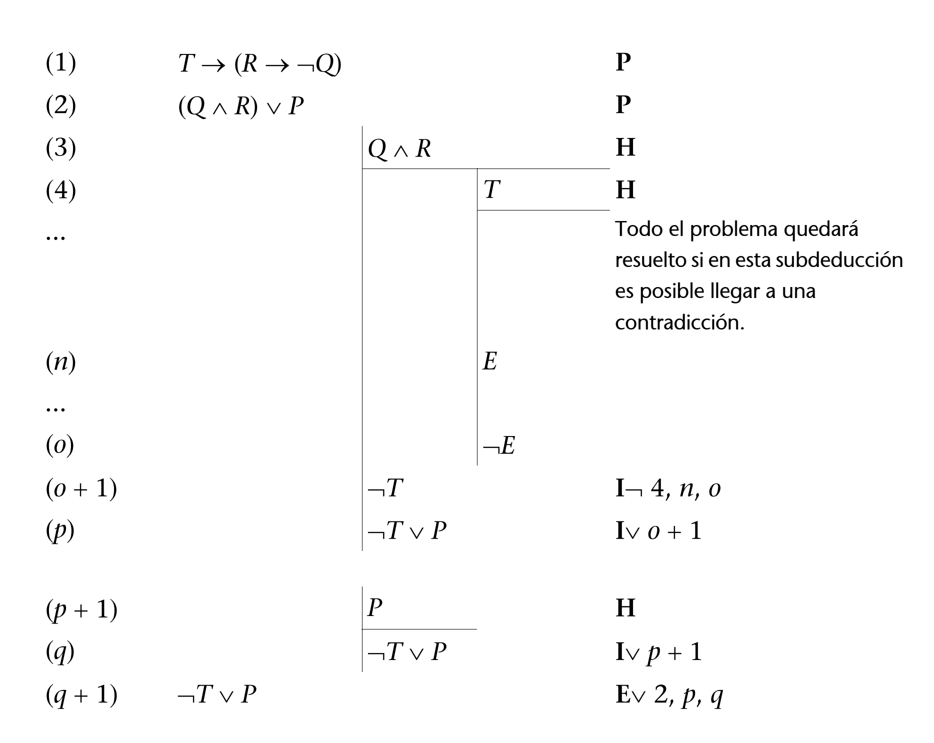
Ejemplos

1) Demostrar la validez del razonamiento $T \to (R \to \neg Q), (Q \wedge R) \vee P \therefore \neg T \vee P$:

- Dado que la segunda premisa del razonamiento es una disyunción, puede ser interesante intentar plantear la demostración como una prueba por casos (**E**$\vee$):

(1)	$T \to (R \to \neg Q)$		**P**
(2)	$(Q \wedge R) \vee P$		**P**
(3)		$Q \wedge R$	**H**
...			En esta subdeducción, el objetivo es llegar a $\neg T \vee P$.
(p)		$\neg T \vee P$	
$(p + 1)$		P	**H**
...			En esta subdeducción, el objetivo es llegar a $\neg T \vee P$.
(q)		$\neg T \vee P$	
$(q + 1)$	$\neg T \vee P$		**E**$\vee$ 2, p, q

- El problema original ha quedado reducido a dos subproblemas: el primero es llegar a $\neg T \vee P$ a partir de las dos premisas y el supuesto $Q \wedge R$ y el segundo es llegar a $\neg T \vee P$ a partir de las dos premisas y el supuesto P. El segundo subproblema tiene una solución inmediata, dado que de P se obtiene $\neg T \vee P$ por aplicación de la regla **I**$\vee$. En lo que respecta al primer subproblema, una posibilidad para atacarlo es intentar obtener $\neg T$. Y una posibilidad para obtener $\neg T$ es hacerlo por aplicación de la regla **I**$\neg$ a partir del supuesto de T, si es que puede encontrarse una contradicción:



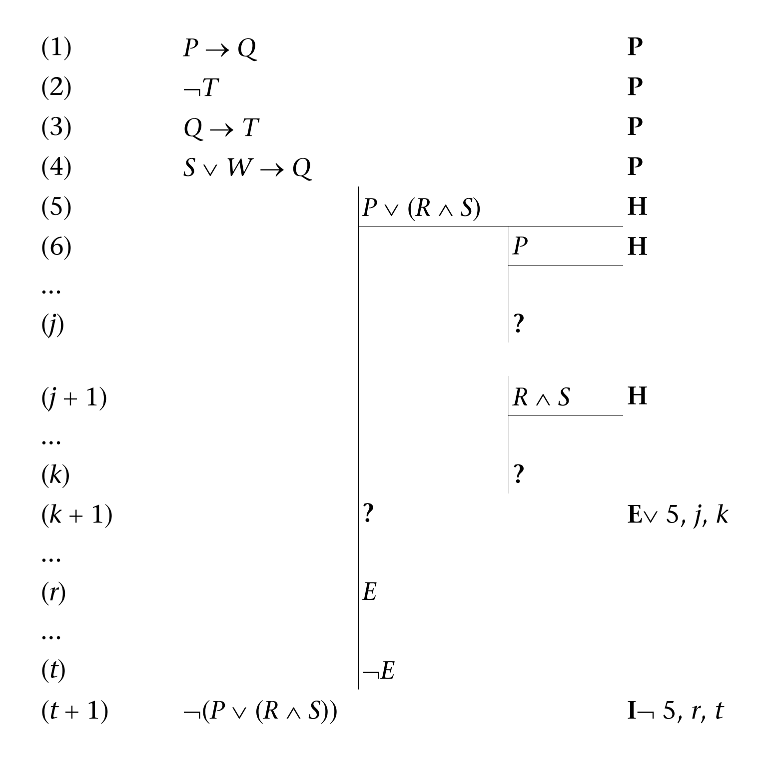
(1)	$T \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$			**P**
(2)	$(Q \wedge R) \vee P$			**P**
(3)		$Q \wedge R$		**H**
(4)			T	**H**
...				Todo el problema quedará resuelto si en esta subdeducción es posible llegar a una contradicción.
(n)			E	
...				
(o)			$\neg E$	
(o + 1)		$\neg T$		**I**$\neg$ 4, n, o
(p)		$\neg T \vee P$		**I**$\vee$ $o + 1$
(p + 1)		P		**H**
(q)		$\neg T \vee P$		**I**$\vee$ $p + 1$
(q + 1)	$\neg T \vee P$			**E**$\vee$ 2, p, q

- La contradicción necesaria para finalizar la demostración puede encontrarse a partir de la primera premisa y los dos supuestos abiertos:

(1)	$T \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$			**P**
(2)	$(Q \wedge R) \vee P$			**P**
(3)		$Q \wedge R$		**H**
(4)			T	**H**
(5)			$R \rightarrow \neg Q$	**E**$\rightarrow$ 1, 4
(6)			R	**E**$\wedge$ 3
(7)			$\neg Q$	**E**$\rightarrow$ 5, 6
(8)			Q	**E**$\wedge$ 3
(9)		$\neg T$		**I**$\neg$ 4, 7, 8
(10)		$\neg T \vee P$		**I**$\vee$ 9
(11)		P		**H**
(12)		$\neg T \vee P$		**I**$\vee$ 11
(13)	$\neg T \vee P$			**E**$\vee$ 2, 10, 12

2) Demostrar la validez de $P \to Q, \neg T, Q \to T, S \vee W \to Q \therefore \neg(P \vee (R \wedge S))$:

- La forma de la conclusión sugiere inmediatamente plantear la demostración como una aplicación de la regla **I¬**. El supuesto de la subdeducción será una disyunción, lo cual puede sugerir plantear la consecución de la contradicción (al menos, de uno de sus dos elementos o de algo que permita obtenerla con facilidad) como una prueba por casos (aplicación de **E∨**):



(1)	$P \to Q$			**P**
(2)	$\neg T$			**P**
(3)	$Q \to T$			**P**
(4)	$S \vee W \to Q$			**P**
(5)		$P \vee (R \wedge S)$		**H**
(6)			P	**H**
...				
(j)			**?**	
(j + 1)			$R \wedge S$	**H**
...				
(k)			**?**	
(k + 1)		**?**		**E∨** 5, j, k
...				
(r)		E		
...				
(t)		$\neg E$		
(t + 1)	$\neg(P \vee (R \wedge S))$			**I¬** 5, r, t

- En este punto, queda por resolver la identidad de los enunciados que forman la contradicción y la del enunciado representado con **?**. Una opción consiste en intentar obtener una contradicción entre $\neg T$ (disponible como premisa) y T (se podría tener si se tuviese Q):

(1)	$P \to Q$			**P**
(2)	$\neg T$			**P**
(3)	$Q \to T$			**P**
(4)	$S \vee W \to Q$			**P**
(5)		$P \vee (R \wedge S)$		**H**
(6)			P	**H**
(7)			Q	**E→** 1, 6
(8)			$R \wedge S$	**H**
(9)			S	**E∧** 8
(10)			$S \vee W$	**I∨** 9
(11)			Q	**E→** 4, 10
(12)		Q		**E∨** 5, 7, 11
(13)		T		**E→** 3, 12
(14)		$\neg T$		**it** 2
(15)	$\neg(P \vee (R \wedge S))$			**I¬** 5, 13, 14

2.3.3. Estrategias

Hemos visto que la construcción de una deducción natural puede enfocarse siguiendo unos planteamientos dirigidos a la consecución del objetivo último de cualquier deducción: la obtención de la conclusión.

Desde un punto de vista estratégico, se consideran dos posibilidades:

1) **La estrategia directa**. Esquemáticamente, la demostración se plantea de modo que la regla aplicada sea la que introduzca la conectiva principal de la conclusión.

2) **La estrategia refutativa** (también denominada **reducción al absurdo**). Esquemáticamente, la demostración se plantea como una introducción de la negación (**I**¬) quizá también seguida de una eliminación de la negación (**E**¬). Se supone la negación del enunciado que quiere obtenerse, se encuentra una contradicción y con todo esto se obtiene al final el enunciado deseado.

Estrategia refutativa y reducción al absurdo

Observad que si la conclusión del razonamiento es una negación y la estrategia inicial está basada en la aplicación de la regla **I**¬, entonces se está haciendo una reducción al absurdo. Sin embargo, no es necesario que la conclusión sea una negación para aplicar esta regla.

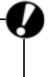
La estrategia refutativa

La estrategia refutativa ya era conocida por los griegos. Con esta estrategia los griegos demostraron la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2: $\sqrt{2}$. Hoy podemos hacer esta demostración de la manera siguiente:

- Supongamos que $\sqrt{2}$ **es un número racional**. Esto quiere decir que se puede expresar en forma de fracción irreducible *a/b* (***a*** **y** ***b*** **no tienen ningún divisor en común**). Es decir: $\sqrt{2} = a/b$.
- Si elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad se obtiene $2 = a^2/b^2$; es decir, $a^2 = 2b^2$. Lo cual quiere decir que a^2 es un número par. Dado que sólo un número par puede tener un cuadrado par, se concluye que ***a*** **es un número múltiplo de dos** y que, como tal, puede expresarse como $a = 2n$.
- Si en la igualdad $a^2 = 2b^2$ se sustituye *a* por $2n$, se obtiene $4n^2 = 2b^2$ y, simplificando: $2n^2 = b^2$. Esto último quiere decir que b^2 es un múltiplo de dos y, por lo tanto, ***b*** **también es un número múltiplo de dos**.
- Que *a* y *b* sean múltiplos de dos es contradictorio con el hecho de que no tengan ningún divisor en común. Como conclusión final, podemos afirmar que $\sqrt{2}$ **no es un número racional**.

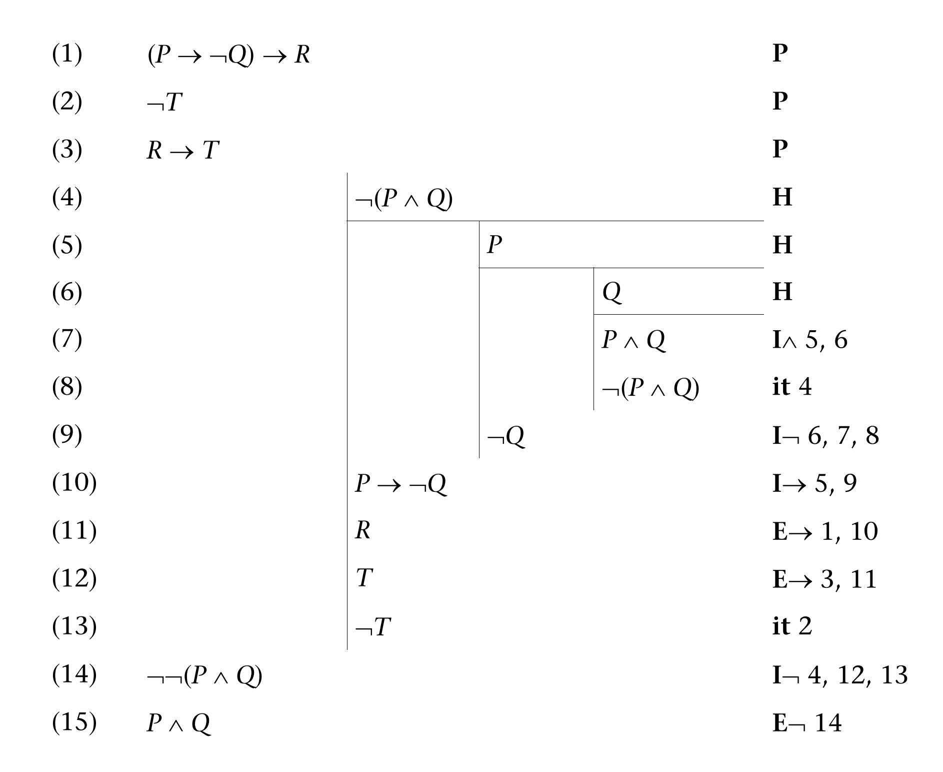
Las dos estrategias permiten reducir el problema de la demostración a uno o más problemas posiblemente más simples. Por otro lado, en determinadas situaciones es posible combinar las dos estrategias en distintos puntos de una misma demostración.

Ejemplos de demostraciones por reducción al absurdo



El segundo ejemplo del punto 2.3.1 también es un ejemplo de reducción al absurdo. Además, observad que muchas demostraciones contienen alguna parte que es una reducción al absurdo.

1) Demostrar la validez del razonamiento $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R, \neg T, R \rightarrow T \therefore P \wedge Q$:



(1)	$(P \to \neg Q) \to R$				**P**
(2)	$\neg T$				**P**
(3)	$R \to T$				**P**
(4)		$\neg(P \wedge Q)$			**H**
(5)			P		**H**
(6)				Q	**H**
(7)				$P \wedge Q$	**I**$\wedge$ 5, 6
(8)				$\neg(P \wedge Q)$	**it** 4
(9)			$\neg Q$		**I**$\neg$ 6, 7, 8
(10)		$P \to \neg Q$			**I**$\to$ 5, 9
(11)		R			**E**$\to$ 1, 10
(12)		T			**E**$\to$ 3, 11
(13)		$\neg T$			**it** 2
(14)	$\neg\neg(P \wedge Q)$				**I**$\neg$ 4, 12, 13
(15)	$P \wedge Q$				**E**$\neg$ 14

2) Demostrar la validez del razonamiento $P \to Q \therefore \neg P \vee Q$:

(1)	$P \to Q$			**P**
(2)		$\neg(\neg P \vee Q)$		**H**
(3)			$\neg P$	**H**
(4)			$\neg P \vee Q$	**I**$\vee$ 3
(5)			$\neg(\neg P \vee Q)$	**it** 2
(6)		$\neg\neg P$		**I**$\neg$ 3, 4, 5
(7)		P		**E**$\neg$ 6
(8)		Q		**E**$\to$ 1, 7
(9)		$\neg P \vee Q$		**I**$\vee$ 8
(10)		$\neg(\neg P \vee Q)$		**it** 2
(11)	$\neg\neg(\neg P \vee Q)$			**I**$\neg$ 2, 9, 10
(12)	$\neg P \vee Q$			**E**$\neg$ 11

La visión directa/refutativa no es la única posible. Según si nos dejamos conducir por las premisas o por la conclusión podemos considerar dos familias más:

a) La estrategia de la construcción dirigida por las premisas: centrada en la idea de obtener de las premisas todo aquello que sea posible para poderlo utilizar en el futuro, si es necesario. Este planteamiento, aplicado de forma indiscriminada, puede comportar más trabajo del estrictamente necesario.

b) La estrategia de la construcción dirigida por la conclusión: centrada en la idea de que la conclusión (o su negación en una reducción al absurdo) debe guiar la mayor parte del proceso demostrativo.

Dado que al validar un razonamiento se conoce su conclusión, el planteamiento dirigido por la conclusión suele ser el más efectivo. Sin embargo, cuando se llega a una situación de "punto muerto", dejarse dirigir por las premisas con el objetivo de descubrir posibilidades desconocidas puede ser una forma razonable de proseguir.

2.4. Reglas derivadas

Una **regla derivada** es una regla que puede demostrarse a partir de las reglas básicas (y otras reglas derivadas, previamente demostradas).

Las reglas derivadas...

... se pueden considerar cómo los subprogramas de la deducción natural: una secuencia de pasos se agrupa bajo la forma de una regla.

A continuación presentamos el **conjunto de reglas derivadas** que se utiliza más habitualmente, con la demostración correspondiente:

a) Regla del silogismo hipotético (SH)

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ B \to C\end{array}}{A \to C}$$

Demostración

(1)	$A \to B$	**P**
(2)	$B \to C$	**P**
(3)	│ A	**H**
(4)	│ B	**E→** 1, 3
(5)	│ C	**E→** 2, 4
(6)	$A \to C$	**I→** 3, 5

b) Regla del quodlibet sequitur (QS)

$$\frac{\begin{array}{c}A \\ \neg A\end{array}}{B}$$

La regla del *quodlibet sequitur* (QS) afirma lo siguiente: de una contradicción se sigue cualquier cosa.



Todo es demostrable cuando se tiene una contradicción.

Demostración

(1)	A	**P**
(2)	$\neg A$	**P**
(3)	│ $\neg B$	**H**
(4)	│ A	**it** 1
(5)	│ $\neg A$	**it** 2
(6)	$\neg\neg B$	**I¬** 3, 4, 5
(7)	B	**E¬** 6

Ejemplo de *quodlibet sequitur*: extracto de un parlamento en el Congreso de los Diputados

El diputado *X* sube al estrado, se acerca al micrófono y comienza su parlamento:

"Señor presidente, señorías; hace unos meses el diputado *Y* afirmó que nuestro país debía desvincularse de la organización *O*. En su parlamento de hace unos días, el diputado *Y* afirmó que nuestro país no se debía desvincular de la organización *O*. Pues bien, eso es una contradicción. ¿Qué podemos esperar, a partir de ahora, que nos diga el diputado *Y*? Yo se lo diré, señorías: a partir de ahora podemos esperar del diputado *Y* que afirme cualquier cosa. *Quodlibet sequitur*, señorías, *quodlibet sequitur*."

Este parlamento es ficticio. Al autor no le consta que un parlamento de estas características haya tenido lugar alguna vez en el Congreso de los Diputados.

c) Regla del silogismo disyuntivo (SD)

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B}$$

Demostración

(1)	$A \vee B$	**P**
(2)	$\neg A$	**P**
(3)	│ A	**H**
(4)	│ $\neg A$	**it** 2
	│ En este punto podemos utilizar la regla **QS** porque ya se ha demostrado.	
(5)	│ B	**QS** 3, 4
(6)	│ B	**H**
(7)	│ B	**it** 6
	Notamos que en esta línea se llega a *B* por iteración de 6, pero no se puede llegar, como en la anterior subdeducción, por **QS**, ya que la contradicción no se encuentra en el ámbito de la subdeducción actual.	
(8)	B	**E∨** 1, 5, 7

d) Regla del modus tollens (MT)

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

Demostración

(1)	$A \to B$	**P**
(2)	$\neg B$	**P**
(3)	$\quad A$	**H**
(4)	$\quad B$	**E**$\to$ 1, 3
(5)	$\quad \neg B$	**it** 2
(6)	$\neg A$	**I**$\neg$ 3, 4, 5

e) Regla de resolución (Res)

$$\frac{\begin{array}{c} \neg A \vee B \\ A \vee C \end{array}}{B \vee C}$$

Demostración

(1)	$\neg A \vee B$	**P**
(2)	$A \vee C$	**P**

La demostración será una prueba por casos para eliminar la primera disyunción.

(3)	$\quad \neg A$	**H**
(4)	$\quad C$	**SD** 2, 3
(5)	$\quad B \vee C$	**I**$\vee$ 4
(6)	$\quad B$	**H**
(7)	$\quad B \vee C$	**I**$\vee$ 6
(8)	$B \vee C$	**E**$\vee$ 1, 5, 7

Estas reglas derivadas se pueden utilizar en cualquier deducción. Así, muchas demostraciones tendrán una medida bastante más pequeña y esto las hará más legibles.

Cualquier demostración en la que se hayan utilizado reglas derivadas puede volverse a escribir sin la utilización de estas reglas: sólo hay que sustituir cada línea en la que se ha utilizado una regla derivada por la demostración de la regla*.

*** Sustituyendo las letras de enunciado A, B, C... que forman parte de la notación de las reglas por los enunciados correspondientes del problema concreto que se resuelve.**

Ejemplo de sustitución de las reglas derivadas

Como ejemplo de sustitución de reglas derivadas, demostramos, utilizando reglas derivadas, la validez del razonamiento $P \to Q$, $P \vee (S \to T)$, $\neg Q$ $\therefore$ $S \to T$, y posteriormente mostramos cómo la aplicación de estas reglas puede sustituirse por su demostración.

- Demostración de la validez del razonamiento utilizando reglas derivadas:

(1)	$P \to Q$	**P**
(2)	$P \vee (S \to T)$	**P**
(3)	$\neg Q$	**P**
(4)	$\neg P$	**MT** 1, 3
(5)	$(S \to T)$	**SD** 2, 4

- Sustitución de las reglas derivadas MT y SD:

(1)	$P \to Q$	**P**
(2)	$P \vee (S \to T)$	**P**
(3)	$\neg Q$	**P**

En la demostración anterior, la línea 4 es una aplicación de la regla MT. Sustituiremos esta aplicación por su demostración (en este caso A será el enunciado P, y B será el enunciado Q).

(4.1)	$P \to Q$	**it** 1
(4.2)	$\neg Q$	**it** 3
(4.3)	P	**H**
(4.4)	Q	**E** $\to$ 4.1, 4.3
(4.5)	$\neg Q$	**it** 4.2
(4.6)	$\neg P$	**I** $\neg$ 4.3, 4.4, 4.5

En la demostración anterior, la línea 5 era una aplicación de la regla SD. Ahora sustituiremos el enunciado A por P y el enunciado B por $S \to T$.

(5.1)	$P \vee (S \to T)$	**it** 2
(5.2)	$\neg P$	**it** 4.6
(5.3)	P	**H**
(5.4)	$\neg P$	**it** 5.2
(5.5)	$S \to T$	**QS** 5.3, 5.4
(5.6)	$S \to T$	**H**
(5.7)	$S \to T$	**it** 5.6
(5.8)	$S \to T$	**E** $\vee$ 5.1, 5.5, 5.7

Como podéis observar, la línea 5.5 es la aplicación de la regla derivada del *quodlibet sequitur*. No es necesario decir que esta aplicación también puede sustituirse por la demostración de la regla: sólo habrá que sustituir 5.5 por 5.5.1, 5.5.2, etc.

2.5. Equivalencias deductivas

En el contexto de las matemáticas es común sustituir una expresión por alguna otra equivalente. Todos sabemos, por ejemplo, que la expresión $(a + b)^2$ puede sustituirse por la expresión $a^2 + b^2 + 2ab$ y a la inversa, porque es posible demostrar que $(a + b)^2$ y $a^2 + b^2 + 2ab$ son equivalentes. Pues bien, con los enunciados sucede algo parecido: existen parejas de enunciados que son equivalentes deductivos.

Cuando ocurre que $A \vdash B$ y también ocurre que $B \vdash A$, se dice que A y B son **equivalentes deductivos**. Este hecho se nota por:

$$A \dashv\vdash B.$$

Los equivalentes deductivos permiten, en algunas ocasiones, simplificar una demostración gracias al **principio de sustitución**: en una deducción, cualquier enunciado se puede sustituir por un equivalente deductivo suyo.

En la práctica, el principio de sustitución afirma que en una deducción siempre es lícito escribir al final de la lista el equivalente deductivo de un enunciado previo.

La lista de los enunciados que son equivalentes deductivos es infinitamente larga. A efectos prácticos, sin embargo, las equivalencias que se utilizan suelen ser siempre las mismas. A continuación damos una lista de las más comunes:

1) $\neg\neg A \dashv\vdash A$.
2) $A \rightarrow B \dashv\vdash \neg B \rightarrow \neg A$. Ley de contrarrecíproco.
3) $A \rightarrow B \dashv\vdash \neg A \vee B$.
4) $\neg(A \rightarrow B) \dashv\vdash A \wedge \neg B$.
5) $\neg(A \vee B) \dashv\vdash \neg A \wedge \neg B$. } Leyes de De Morgan
6) $\neg(A \wedge B) \dashv\vdash \neg A \vee \neg B$. }
7) $A \wedge B \rightarrow C \dashv\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Para demostrar que un par de enunciados, A y B, son equivalentes deductivos, sólo hay que hacer dos demostraciones: una para $A \vdash B$ y otra para $B \vdash A$.

Ejemplo: demostración de que dos enunciados son equivalentes deductivos

Veamos que los enunciados $\neg(A \vee B) \dashv\vdash \neg A \wedge \neg B$ son equivalentes deductivos:

• **Primera demostración:**

(1)	$\neg(A \vee B)$		**P**
(2)		A	**H**
(3)		$A \vee B$	**I**$\vee$ 2
(4)		$\neg(A \vee B)$	**it** 1
(5)	$\neg A$		**I**$\neg$ 2, 3, 4
(6)		B	**H**
(7)		$A \vee B$	**I**$\vee$ 6
(8)		$\neg(A \vee B)$	**it** 1
(9)	$\neg B$		**I**$\neg$ 6, 7, 8
(10)	$\neg A \wedge \neg B$		**I**$\wedge$ 5, 9

• **Segunda demostración:**

(1)	$\neg A \wedge \neg B$	**P**
(2)	$\mid A \vee B$	**H**
(3)	$\mid \mid A$	**H**
(4)	$\mid \mid \neg A$	**E∧** 1
(5)	$\mid \mid A$	**it** 3
(6)	$\mid \mid \neg(A \vee B)$	**QS 4, 5**
(7)	$\mid \mid B$	**H**
(8)	$\mid \mid \neg B$	**E∧** 1
(9)	$\mid \mid B$	**it** 7
(10)	$\mid \mid \neg(A \vee B)$	**QS** 8, 9
(11)	$\mid \neg(A \vee B)$	**E∨** 2, 6, 10
(12)	$\mid (A \vee B)$	**it** 2
(13)	$\neg(A \vee B)$	**I¬** 2, 11, 12

Los equivalentes deductivos pueden utilizarse en las demostraciones para simplificar el proceso deductivo. Cuando en una deducción se utiliza un equivalente deductivo, este hecho se nota con **ED**.

Ejemplo de utilización de un equivalente deductivo

Demostramos que el razonamiento $\neg(P \vee Q), S \rightarrow P \vee T \therefore \neg T \rightarrow \neg S$ es correcto:

(1)	$\neg(P \vee Q)$	**P**
(2)	$S \rightarrow P \vee T$	**P**
(3)	$\mid \neg T$	**H**
(4)	$\mid \neg P \wedge \neg Q$	**ED** 1
(5)	$\mid \neg P$	**E∧** 4
(6)	$\mid \neg P \wedge \neg T$	**I∧** 3, 5
(7)	$\mid \neg(P \vee T)$	**ED** 6
(8)	$\mid \neg S$	**MT** 2, 7
(9)	$\neg T \rightarrow \neg S$	**I→** 3, 8

Igual que en el caso de las reglas derivadas, una demostración que contiene la utilización de equivalentes deductivos puede transformarse en una demostración, igualmente correcta, que no la contiene. Sólo hay que sustituir la aplicación de los equivalentes deductivos utilizados para su demostración.

La equivalencia deductiva ($\dashv \vdash$) se puede entender como la igualdad (=) de los enunciados. Esta forma de concebirla permite sustituir cualquier subenunciado de un enunciado por un equivalente deductivo del primero.

Ejemplo de aplicación del principio de sustitución

Dado que: $Q \rightarrow R \dashv \vdash \neg Q \vee R$,

entonces: $P \rightarrow (\neg Q \vee R) \dashv \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$.

Consecuentemente, en cualquier deducción en la que hubiera $P \rightarrow (\neg Q \vee R)$ se podría poner $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$, en virtud del principio de sustitución.

2.6. teoremas

2.6.1. Demostraciones sin premisas

Recordad que la demostración de un enunciado C a partir de las premisas $A_1, \ldots, A_n$ la hemos definido como una deducción de la forma siguiente:

$$\underbrace{A_1, \ldots, A_n}_{\text{Premisas } (n \geq 0)}, \ldots, C$$

Notad que esta definición tiene en cuenta la no-existencia de premisas (n es mayor o igual que cero).

Hasta este momento se han visto numerosos ejemplos de demostraciones. Ahora bien, en ningún caso se ha planteado el hecho de tener que demostrar un enunciado sin la necesidad de ninguna premisa. Hasta cierto punto podría parecer razonable pensar que esto no es posible, lo cual no sería cierto, puesto que ya existen infinitos enunciados que pueden ser demostrados sin la necesidad de ninguna premisa: los teoremas.

Cuando un enunciado necesita cero premisas para ser demostrado decimos que es un teorema. Un **teorema** es una conclusión incondicional. Para indicar que C es un teorema se utiliza la notación siguiente:

$$\vdash C$$

A continuación exponemos algunos ejemplos de teoremas: 

1) Unos de los teoremas más conocidos son los denominados **principios aristotélicos**:

a) Principio de identidad: $\vdash A \rightarrow A$.
b) Principio de no-contradicción: $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$.
c) Principio del tercero excluido: $\vdash A \vee \neg A$.

2) Quizá menos conocidos son los teoremas denominados **axiomas de Hilbert:**

a) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \{ [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C) \}$.
c) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]$.
d) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$.

A, *B* y *C* designan enunciados cualesquiera*. Por tanto, lo que realmente se tiene son esquemas de generación de teoremas. Así, si en el principio de identidad se sustituye *A* por $P \vee \neg Q$, se obtendrá el teorema siguiente:

* No necesariamente atómicos.

$$\vdash (P \vee \neg Q) \rightarrow (P \vee \neg Q).$$

Demostración de los principios aristotélicos

A modo de ejemplo se da la demostración de los tres principios aristotélicos:

a) La demostración del principio de indentidad la planteamos como una introducción de la implicación.

(1)	$\mid A$	**H**
(2)	$\mid A$	**it** 1
(3)	$A \rightarrow A$	**I**$\rightarrow$ 1, 2

b) La **demostración del principio de no-contradicción** la planteamos como una reducción al absurdo:

(1)	$\mid A \wedge \neg A$	**H**
(2)	$\mid A$	**E**$\wedge$ 1
(3)	$\mid \neg A$	**E**$\wedge$ 1
(4)	$\neg(A \wedge \neg A)$	**I**$\neg$ 1, 2, 3

c) La **demostración del principio del tercero excluido** también la planteamos como una reducción al absurdo:

(1)	$\mid \neg(A \vee \neg A)$	**H**
(2)	$\mid \mid A$	**H**
(3)	$\mid \mid A \vee \neg A$	**I**$\vee$ 2
(4)	$\mid \mid \neg(A \vee \neg A)$	**it** 1
(5)	$\mid \neg A$	**I**$\neg$ 2, 3, 4
(6)	$\mid A \vee \neg A$	**I**$\vee$ 5
(7)	$\mid \neg(A \vee \neg A)$	**it** 1
(8)	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	**I**$\neg$ 1, 6, 7
(9)	$A \vee \neg A$	**E**$\neg$ 8

Utilizando equivalentes deductivos podemos obtener una demostración más simple de este último principio:

(1)	$\mid \neg (A \vee \neg A)$	**H**
(2)	$\mid \neg A \wedge \neg\neg A$	**ED1**
(3)	$\mid \neg A$	**E**$\wedge$ 2
(4)	$\mid \neg\neg A$	**E**$\wedge$ 2
(5)	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	**I**$\neg$ 1, 3, 4
(6)	$A \vee \neg A$	**E**$\neg$ 5

2.6.2. Propiedades de los teoremas

Los teoremas presentan algunas propiedades bastante interesantes, entre las cuales podemos destacar las siguientes:

1) Un teorema puede ser introducido en cualquier línea de una deducción, porque no necesita premisas para ser demostrado.

Cuando un teorema se introduce en una demostración se nota con **TE**.

2) Como consecuencia del punto anterior, todos los teoremas son equivalentes deductivos entre sí.

3) De la negación de cualquier teorema, se desprende una contradicción.

Demostración de la equivalencia deductiva de los teoremas

La demostración de la equivalencia deductiva de todos los teoremas entre sí se basa en la posibilidad de introducir un teorema en cualquier línea de una demostración:

a) Sea *T1* un teorema ($\vdash T1$) y *T2* otro teorema ($\vdash T2$). Entonces:

(1) *T1*	**P**
(2) *T2*	**TE**

y, por tanto, es lícito afirmar que $T1 \vdash T2$, porque con *T1* como premisa se ha podido demostrar *T2*.

b) De la misma manera:

(1) *T2*	**P**
(2) *T1*	**TE**

y, por tanto, también es lícito afirmar $T2 \vdash T1$.

Finalmente, si es lícito afirmar $T1 \vdash T2$ y también es lícito afirmar $T2 \vdash T1$, entonces es legítimo concluir que $T1 \dashv\vdash T2$, y puesto que la prueba dada es independiente de qué teoremas son *T1* y *T2*, podemos afirmar que cualquier pareja de teoremas son equivalentes deductivos.

A partir de este momento, cuando se quiera hacer referencia a un teorema sin explicitar de cuál se trata* se utilizará el símbolo ■. Igualmente, cuando se quiera hacer referencia a una contradicción, sin explicitar de cuál se trata, se utilizará el símbolo □. ❗

* En muchas ocasiones no es necesario, ya que todos ellos son equivalentes.

Veamos a continuación cómo de la negación de cualquier teorema se desprende una contradicción.

Sea T un teorema cualquiera, entonces:

(1) $\neg T$	**P**
(2) T	**TE**
(3) $\neg T$	**it** 1
(4) $T \wedge \neg T$	**I**$\wedge$ 2, 3

Recordad...

... que hemos definido una contradicción como una pareja formada por un enunciado y su negación o, lo que es lo mismo, la conjunción de un enunciado y su negación.

Observad que $\neg T \vdash T \wedge \neg T$. Dado que $T \wedge \neg T$ es una contradicción, ya se puede afirmar que de $\neg T$ se desprende una contradicción.

La prueba que se acaba de desarrollar es independiente de qué teorema sea T. Consecuentemente, de la negación de cualquier teorema se desprende una contradicción.

Ejemplo de utilidad de los teoremas

Mediante un ejemplo ilustramos la utilidad de los teoremas y del principio de libre sustitución. Supongamos que se quiere demostrar que $P \to Q, \neg(\neg P \wedge \neg S) \therefore Q \vee S$ es un razonamiento correcto.

La demostración podría ser como ésta:

(1)	$P \to Q$	**P**
(2)	$\neg(\neg P \wedge \neg S)$	**P**
(3)	$\neg\neg P \vee \neg\neg S$	**ED** 2
(4)	$\neg P \to \neg\neg S$	**ED** 3
(5)	$P \vee \neg P$	**TE**
(6)	P	**H**
(7)	Q	**E**$\to$ 1, 6
(8)	$Q \vee S$	**I**$\vee$ 7
(9)	$\neg P$	**H**
(10)	$\neg\neg S$	**E**$\to$ 4, 9
(11)	S	**E**$\neg$ 10
(12)	$Q \vee S$	**I**$\vee$ 11
(13)	$Q \vee S$	**E**$\vee$ 5, 8, 12

3. Verdad y falsedad: alternativa y complemento de la deducción natural

3.1. La lógica no considera el significado de los enunciados

La deducción natural es un método de validación de razonamientos puramente sintáctico: la validez se determina a partir de la aplicación de unas reglas que en ningún caso tienen en cuenta el significado ni de las premisas ni de la conclusión.

La lógica, como ciencia formal que es, no se ocupa del significado de los átomos ni de los enunciados que se construyen a partir de éstos, porque si lo hiciera invadiría el campo de las ciencias empíricas.

A pesar de su indiferencia hacia el significado tanto de las premisas como de la conclusión, la lógica garantiza que si un razonamiento es correcto, siempre que las premisas sean verdaderas, la conclusión también lo será.

Dado su desinterés por la certeza o la falsedad de lo que los átomos y enunciados expresan, la posición de la lógica consiste en considerar todas las posibilidades, sin cuestionarse cuál es la que realmente tiene sentido. Concretamente, la lógica asume que cualquier enunciado atómico puede ser verdadero (V) o falso (F), pero no ambas cosas simultáneamente.

Cuando se considera que un enunciado es verdadero, se dice que su valor de verdad es V. Cuando es falso, se dice que es F.

Por ejemplo,...

... el razonamiento "El agua se solidifica cuando hierve, ahora el agua hierve y, en consecuencia, ahora el agua se solidifica", es un razonamiento totalmente correcto desde un punto de vista formal, pero la certeza de su contenido la decide la química.

Asumir...

... que cualquier enunciado atómico puede ser verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez, es propio de la lógica denominada clásica. Existen otras lógicas, las denominadas no clásicas, que consideran otras posibilidades.

3.2. Tablas de verdad

La forma en la que el valor de verdad de un enunciado compuesto depende del valor de verdad de los subenunciados que lo componen se resume en las denominadas **tablas de verdad**:

Tablas de verdad

Conjunción, disyunción e implicación

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Negación

A	$\neg A$
V	F
F	V

El valor de verdad

a) En el caso de la **conjunción**, el valor de verdad es verdadero, sólo cuando lo es el de ambos conjuntandos.

b) En el caso de la **disyunción**, el valor de verdad es verdadero cuando lo es el de alguno de los disyuntandos.

c) Por lo que respecta a la **implicación**, su valor de verdad sólo es falso en el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente, falso.

d) Para la **negación** de un enunciado, el valor de verdad es verdadero cuando el del enunciado es falso, y es falso cuando el del enunciado es verdadero.

A partir de las tablas de verdad que acabamos de presentar, es posible construir la de cualquier enunciado. Un enunciado en el que aparezcan n átomos tendrá una tabla de verdad con 2^n filas, una por cada posible combinación de los valores V y F asignados a cada uno de los átomos.

Ejemplo de construcción de una tabla de verdad

Veamos el proceso que se seguiría para construir la tabla de verdad del enunciado siguiente:

$$\neg(P \rightarrow \neg Q) \vee (R \wedge \neg S)$$

Dado que en el enunciado aparecen 4 átomos, la tabla de verdad resultante tendrá 16 filas diferentes. Para facilitar su construcción, construiremos también las columnas correspondientes a los subenunciados $\neg Q$, $\neg S$, $P \rightarrow \neg Q$, $\neg(P \rightarrow \neg Q)$ y $R \wedge \neg S$, aunque estos pasos intermedios no son estrictamente necesarios.

P	Q	R	S	$\neg Q$	$\neg S$	$P \rightarrow \neg Q$	$\neg(P \rightarrow \neg Q)$	$R \wedge \neg S$	$\neg(P \rightarrow \neg Q) \vee (R \wedge \neg S)$
V	V	V	V	F	F	F	V	F	**V**
V	V	V	F	F	V	F	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	F	V	F	**V**
V	V	F	F	F	V	F	V	F	**V**
V	F	V	V	V	F	V	F	F	**F**
V	F	V	F	V	V	V	F	V	**V**
V	F	F	V	V	F	V	F	F	**F**
V	F	F	F	V	V	V	F	F	**F**
F	V	V	V	F	F	V	F	F	**F**
F	V	V	F	F	V	V	F	V	**V**
F	V	F	V	F	F	V	F	F	**F**
F	V	F	F	F	V	V	F	F	**F**
F	F	V	V	V	F	V	F	F	**F**
F	F	V	F	V	V	V	F	V	**V**
F	F	F	V	V	F	V	F	F	**F**
F	F	F	F	V	V	V	F	F	**F**

Cada una de las posibles asignaciones de un valor de verdad a cada uno de los átomos que forman parte de un enunciado se denomina **interpretación**. Cada fila de una tabla de verdad se corresponde con una posible interpretación del enunciado, así que un enunciado con n átomos tiene 2^n posibles interpretaciones.

En el ejemplo que se acaba de ver, $\{ P = V, Q = F, R = V, S = F \}$ es una de las dieciséis interpretaciones distintas que tiene el enunciado. $\{ P = F, Q = V, R = F, S = F \}$ es otra. La primera hace verdadero el enunciado, mientras que la segunda lo hace falso.

3.3. Tautologías, antinomias y enunciados contingentes

En función del valor de verdad de un enunciado, tenemos que:

a) Cuando el valor de verdad de un enunciado es V en todas las interpretaciones se dice que es una **tautología**.

b) Cuando su valor de verdad es F en todas las interpretaciones se le denomina **antinomia***.

c) Cuando el valor de verdad de un enunciado es V en algunas interpretaciones y F en otras se dice que el enunciado es **contingente**.

* Las antinomias también se denominan con frecuencia enunciados insatisfactibles.

Un enunciado es una tautología si y sólo si es un teorema, y es una antinomia si y sólo si es una contradicción.

Ejemplo de tautología y de antinomia

Las tablas de verdad de $P \to (Q \to P)$ (una tautología) y de $P \wedge Q \wedge (P \to \neg Q)$ (una antinomia) son las siguientes:

Ejemplo de tautología

P	Q	$Q \to P$	$P \to (Q \to P)$
V	V	V	**V**
V	F	V	**V**
F	V	F	**V**
F	F	V	**V**

Ejemplo de antinomia

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \to \neg Q$	$(P \wedge Q) \wedge (P \to \neg Q)$
V	V	F	V	F	**F**
V	F	V	F	V	**F**
F	V	F	F	V	**F**
F	F	V	F	V	**F**

3.4. Validación de razonamientos utilizando tablas de verdad

Las tablas de verdad proporcionan una manera de validar razonamientos alternativa a la deducción natural. Un razonamiento es correcto si y sólo si todas aquellas interpretaciones que hacen verdaderas las premisas (todas simultáneamente) también hacen verdadera la conclusión.

Ejemplo de razonamiento correcto

El razonamiento “El agua se solidifica cuando hierve. Si se solidifica, el agua aumenta su densidad. Como conclusión, el agua aumenta su densidad cuando hierve”, es formalmente correcto, como vemos a continuación.

Si asignamos S a “el agua se solidifica”, B a “el agua hierve” y D a “el agua aumenta su densidad”, entonces: $B \rightarrow S$ y $S \rightarrow D \therefore B \rightarrow D$.

Veamos la tabla de verdad en la página siguiente:

B	S	D	$B \rightarrow S$	$S \rightarrow D$	$B \rightarrow D$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	V	F	V	F	V
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**

Como podemos comprobar fácilmente, todas las interpretaciones que hacen verdaderas las premisas también hacen verdadera la conclusión y, por tanto, se puede afirmar que el razonamiento es correcto ($B \rightarrow S$, $S \rightarrow D \vdash B \rightarrow D$).

Es importante darse cuenta de que existen interpretaciones que hacen verdadera la conclusión sin que hagan verdaderas ambas premisas. Este hecho es perfectamente aceptable y no dice nada en contra de la validez del razonamiento ya que, si el razonamiento es correcto, “premisas verdaderas” quiere decir “conclusión verdadera”, “premisas falsas” no quiere decir nada, “conclusión verdadera” no quiere decir nada, y “conclusión falsa” quiere decir que, como mínimo, una de las premisas es falsa.

3.5. Refutación de razonamientos utilizando tablas de verdad: contraejemplos

Las tablas de verdad también sirven para refutar razonamientos, es decir, para demostrar la invalidez de los que son formalmente incorrectos. Un razonamiento es formalmente inválido cuando existe, como mínimo, una interpretación que denominaremos **contraejemplo**, que hace verdaderas todas las premisas y falsa la conclusión. Para demostrar que un razonamiento es inválido es suficiente con encontrar un contraejemplo.

Para el razonamiento...

... que se ha demostrado en el ejemplo de razonamiento correcto, no existe ningún contraejemplo. Si hubiera alguno, ya no sería correcto.

Ejemplos de refutación de razonamientos

1) Como ejemplos de razonamiento incorrecto consideramos $P \vee Q \therefore P \wedge Q$:

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	
V	V	V	V	
V	**F**	**V**	**F**	Contraejemplos
F	**V**	**V**	**F**	Contraejemplos
F	F	F	F	

Así, queda demostrado que el razonamiento es incorrecto, ya que las interpretaciones { $P = V$, $Q = F$ } y { $P = F$, $Q = V$ } son contraejemplos del mismo.

2) A continuación demostramos que el razonamiento "Cuando llueve, José se pone la gabardina o se queda en casa. Hoy José no está en casa, pero lleva la gabardina puesta. Debe ser porque llueve" es incorrecto.

Si asignamos P a "llueve", G a "José lleva la gabardina puesta" y C a "José está en casa", entonces: $P \rightarrow C \vee G, \neg C \wedge G \therefore P$.

P	C	G	$P \rightarrow C \vee G$	$\neg C \wedge G$	P	
V	V	V	V	F	V	
V	V	F	V	F	V	
V	F	V	V	V	V	
V	F	F	F	F	V	
F	V	V	V	F	F	
F	V	F	V	F	F	
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	——— Contraejemplo
F	F	F	V	F	F	

La interpretación { $P = F$, $C = F$, $G = V$ } hace verdaderas las premisas, pero falsa la conclusión. Con las premisas dadas es perfectamente factible que no llueva y que José no esté en casa, pero que lleve la gabardina (quizá está nevando y, en esta circunstancia, José también se ponga la gabardina...).

3.6. Razonamientos con premisas inconsistentes

Hay razonamientos en los cuales ninguna interpretación hace ciertas todas las premisas simultáneamente. Para estos razonamientos es imposible encontrar ningún contraejemplo porque, por definición, un contraejemplo debe hacer ciertas todas las premisas. Dado que no pueden encontrarse contraejemplos, estos razonamientos son siempre válidos, con independencia de cuál sea la conclusión.

Cuando las premisas de un razonamiento no son nunca ciertas simultáneamente, se dice que son **inconsistentes**. Un razonamiento que tiene las premisas inconsistentes es **siempre válido**.

Ejemplo

El razonamiento $P \wedge (Q \rightarrow S), P \rightarrow Q, \neg S \therefore S \wedge \neg Q$ es válido porque sus premisas son inconsistentes. Observad que ninguna interpretación las hace todas ciertas simultáneamente.

P	Q	S	$P \wedge (Q \rightarrow S)$	$P \rightarrow Q$	$\neg S$	$S \wedge \neg Q$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Cuando las premisas de un razonamiento (o un conjunto cualquiera de enunciados) son inconsistentes, se deriva una contradicción. La presencia de esta contradicción posibilita la validación del razonamiento, independientemente de cuál sea la conclusión.

Observad la siguiente demostración del razonamiento del ejemplo anterior:

(1)	$P \wedge (Q \rightarrow S)$	**P**
(2)	$P \rightarrow Q$	**P**
(3)	$\neg S$	**P**
(4)	P	**E∧** 1
(5)	$Q \rightarrow S$	**E∧** 1
(6)	Q	**E→** 2, 4
(7)	**S**	**E→** 5, 6
(8)	¬**S**	**it** 3
(9)	$S \wedge \neg Q$	**QS** 7, 8

3.7. Enunciados equivalentes

Hemos visto que dos enunciados cualesquiera *A* y *B* son deductivamente equivalentes ($A \dashv\vdash B$) cuando a partir del primero puede demostrarse el segundo ($A \vdash B$) y a partir del segundo puede demostrarse el primero ($B \vdash A$).

Si $A \vdash B$, todas las interpretaciones que hacen verdadero *A* también hacen verdadero *B*. Si $B \vdash A$ todas las interpretaciones que hacen verdadero *B* también hacen verdadero *A*. Las dos cosas sólo son posibles si *A* y *B* tienen exactamente la misma tabla de verdad.

Dos enunciados son deductivamente equivalentes, si y sólo si, sus tablas de verdad son idénticas.

Ejemplo de enunciados que son deductivamente equivalentes

Las tablas de verdad de los enunciados $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ y $(P \wedge Q) \rightarrow S$ son idénticas. Estos dos enunciados son equivalentes deductivos.

P	*Q*	*S*	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	$(P \wedge Q) \rightarrow S$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

Ejemplo de enunciados que no son deductivamente equivalentes

Las tablas de verdad de los enunciados $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ y $(P \rightarrow Q) \rightarrow S$ no son idénticas. Estos dos enunciados no son equivalentes deductivos.

P	Q	S	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow S$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

4. El álgebra de enunciados

4.1. Leyes del álgebra de Boole

Los enunciados con las reglas de la deducción natural vistas en el apartado anterior forman un álgebra de Boole.

Un **álgebra de Boole** es un conjunto en el que hay definidas dos operaciones binarias (que en el caso de los enunciados son $\wedge$ y $\vee$) y donde se cumplen unas determinadas propiedades.

Expresadas en forma de leyes, las propiedades de los enunciados vistos como álgebra de Boole son las siguientes:

Leyes del álgebra de Boole	
1. Idempotencia	**a.** $A \wedge A = A$ **b.** $A \vee A = A$
2. Conmutatividad	**a.** $A \wedge B = B \wedge A$ **b.** $A \vee B = B \vee A$
3. Asociatividad	**a.** $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ **b.** $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
4. Absorción	**a.** $A \wedge (B \vee A) = A$ **b.** $A \vee (B \wedge A) = A$
5. Distributividad	**a.** $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ **b.** $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. Ley del ínfimo	**a.** $A \wedge \square = \square$ **b.** $A \vee \square = A$
7. Ley del supremo	**a.** $A \wedge \blacksquare = A$ **b.** $A \vee \blacksquare = \blacksquare$
8. Complementariedad	**a.** $A \wedge \neg A = \square$ **b.** $A \vee \neg A = \blacksquare$

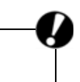
El símbolo =

En este contexto, el símbolo = tiene el significado de 'equivalente'.

A partir de las ocho leyes anteriores es posible demostrar otras, como por ejemplo:

Otras leyes	
1. Leyes de De Morgan	**a.** $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ **b.** $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
2. Cancelación	Si $A \wedge C = B \wedge C$ y $A \vee C = B \vee C$ } entonces $A = B$
3. Involución	$\neg\neg A = A$

La visión algebraica de los enunciados deja de lado la conectiva $\rightarrow$. Sólo prevé $A \rightarrow B$ como una forma alternativa de escribir $\neg A \vee B$. Así pues:



El álgebra de los enunciados se utiliza, muy a menudo, para simplificar enunciados.

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B$$

4.2. Formas normales

4.2.1. Forma normal conjuntiva y forma normal disyuntiva

Cuando un enunciado está expresado como una conjunción de disyunciones de átomos o de negaciones de átomos se dice que está en **forma normal conjuntiva** (**FNC**):

$$(\ldots \vee \ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge \ldots \wedge (\ldots \vee \ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge \ldots \wedge (\ldots \vee \ldots \vee \ldots)$$

Cuando un enunciado está expresado como una disyunción de conjunciones de átomos o de negaciones de átomos se dice que está en forma **normal disyuntiva** (**FND**):

$$(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee \ldots \vee (\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee \ldots \vee (\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots)$$

Fijaos en que...

... algunos enunciados, como $A \vee B$ o $A \wedge B$ o $\neg A$, están expresados en ambas formas normales de manera simultánea.

Los pasos para encontrar la FNC de cualquier enunciado son los que presentamos a continuación:

1) Eliminar todas las apariciones de la conectiva $\rightarrow$ sustituyendo $A \rightarrow B$ por $\neg A \vee B$.

2) Interiorizar las negaciones para que sólo afecten a los átomos utilizando las leyes de De Morgan, que acabamos de enunciar, que transforman $\neg(A \wedge B)$ en $\neg A \vee \neg B$ y $\neg(A \vee B)$ en $\neg A \wedge \neg B$.

3) Simplificar las posibles dobles negaciones sustituyendo $\neg\neg A$ por A.

4) Aplicar la distributividad para que las conjunciones queden fuera de los paréntesis y las disyunciones dentro (sustituir $A \vee (B \wedge C)$ por $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$).

5) Simplificar el resultado, si procede, utilizando la idempotencia, la complementariedad y la ley del supremo.

Para encontrar la FND de cualquier enunciado, hay que seguir los mismos pasos, pero aplicando la distributividad de la disyunción*.

*** Es decir, hay que sustituir $A \wedge (B \vee C)$ por $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.**

Ejemplo de obtención de la forma FNC y FND de un enunciado

Para encontrar la FNC y la FND del enunciado $(P \to Q \vee R) \wedge \neg(S \to P)$ se haría lo siguiente:

a) $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge \neg(\neg S \vee P)$. Eliminación de las implicaciones.

b) $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg\neg S \wedge \neg P)$. De Morgan para interiorizar la negación.

c) $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge S \wedge \neg P$. Simplificación de $\neg\neg$*.

d) $[(\neg P \wedge S) \vee (Q \wedge S) \vee (R \wedge S)] \wedge \neg P$. Distributividad.

e) $[(\neg P \wedge S \wedge \neg P) \vee (Q \wedge S \wedge \neg P) \vee (R \wedge S \wedge \neg P)]$. Distributividad.

f) $[(\neg P \wedge S) \vee (Q \wedge S \wedge \neg P) \vee (R \wedge S \wedge \neg P)]$. Idempotencia

* En este punto, el enunciado ya se encuentra en FNC. Continuamos para encontrar la FND.

Así pues, hemos encontrado que:

- $\text{FNC}((P \to Q \vee R) \wedge \neg(S \to P)) = (\neg P \vee Q \vee R) \wedge S \wedge \neg P$.
- $\text{FND}((P \to Q \vee R) \wedge \neg(S \to P)) = (\neg P \wedge S) \vee (Q \wedge S \wedge \neg P) \vee (R \wedge S \wedge \neg P)$.

4.2.2. Formas normales y equivalencia

Cuando dos enunciados tienen la misma forma normal conjuntiva puede afirmarse que son equivalentes. Igualmente, si sus formas normales disyuntivas coinciden, también puede afirmarse que son equivalentes.

Las formas normales pueden ser utilizadas para comparar dos enunciados y descubrir si son equivalentes.

Por ejemplo, supongamos los enunciados:

$$\mathrm{P} \to (\mathrm{Q} \to \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{R} \to \mathrm{Q}) \text{ y } (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \to \to \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R} \to \mathrm{Q})$$

- $\mathrm{P} \to (\mathrm{Q} \to \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{R} \to \mathrm{Q}) = \neg\mathrm{P} \vee [(\neg\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \wedge (\neg\mathrm{R} \vee \mathrm{Q})] =$
  $= (\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \wedge (\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{R} \vee \mathrm{Q})$. Así pues:

$$\mathrm{FNC}(\mathrm{P} \to (\mathrm{Q} \to \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{R} \to \mathrm{Q})) = (\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \wedge (\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{R} \vee \mathrm{Q})$$

- $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \to \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R} \to \mathrm{Q}) = [\neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee \mathrm{R}] \wedge [\neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{R}) \vee \mathrm{Q}] =$
  $= (\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \wedge (\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{R} \vee \mathrm{Q})$. Así pues:

$$\mathrm{FNC}((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \to \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R} \to \mathrm{Q})) = (\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \wedge (\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{R} \vee \mathrm{Q})$$

Dado que las formas normales conjuntivas de estos dos enunciados coinciden, podemos afirmar que son equivalentes.

De todos modos, el hecho de que las formas normales de dos enunciados no sean idénticas no significa que estos enunciados no sean equivalentes.

Por ejemplo, los enunciados $(Q \vee S) \wedge Q$ y Q son equivalentes, pero:

- $\text{FNC}((Q \vee S) \wedge Q) = (Q \vee S) \wedge Q$; $\text{FND}((Q \vee S) \wedge Q) = Q \vee (Q \wedge S)$
- $\text{FNC}(Q) = \text{FND}(Q) = Q$

5. Resolución

5.1. Introducción al método de resolución

En el año 1965, A. Robinson dio a conocer el método de demostración (y de refutación) conocido con el nombre de **resolución**. La resolución es un procedimiento de demostración sistemático que permite ser mecanizado con relativa simplicidad.

5.1.1. Una única regla: la regla de resolución

El método de resolución utiliza una única regla: la **regla de resolución**. El método recibe el nombre de esta regla.

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \underline{\neg A \vee C} \\ B \vee C \end{array}$$

La regla afirma que si se tiene una disyunción que contiene un enunciado *A*, y también se tiene otra disyunción que contiene la negación de este enunciado *A*, entonces es lícito obtener una disyunción que contiene todos los disyuntandos de las dos anteriores, excepto la pareja *A* y ¬*A* porque se aniquilan mutuamente.

Ejemplo de aplicación de la regla de resolución

Si aplicamos la regla de resolución, de las disjunciones $\neg P \vee Q$ y $\neg Q \vee S$, obtendremos la disjunción $\neg P \vee S$; y de las disjunciones $P \vee \neg Q \vee R$ y $\neg Q \vee \neg R \vee S$ obtendremos la disjunción $P \vee \neg Q \vee S \vee \neg Q$, que es equivalente (se puede simplificar) a $P \vee \neg Q \vee S$. Consideremos, sin embargo, el siguiente par de casos particulares.

a) Primer caso

$$\begin{array}{c} A \\ \underline{\neg A} \\ \square \end{array}$$

En este caso, A y ¬*A* se consideran disjunciones de un único disjuntando. Los dos disjuntandos se aniquilan mútuamente y el resultado es una contradicción.

b) Segundo caso

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \vee \neg B \end{array}}{A \vee \neg A} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \vee \neg B \end{array}}{B \vee \neg B}$$

Si hay más de una pareja de disjuntandos que pueden aniquilarse mútumente, sólo uno de ellos desaparece y los demás permanecen en la disjunción resultante. Así, pues, el razonamiento siguiente es totalmente incorrecto.

Recordad que...

... el símbolo □ representa una contradicción y el símbolo ■ representa un teorema.

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \vee \neg B \end{array}}{\square}$$

Lo correcto es lo siguiente:

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \vee \neg B \end{array}}{\blacksquare}$$

Y dado que siempre se puede obtener un teorema (principio de libre inclusión), aplicaciones de una regla como ésta no sirven de nada y hay que evitarlas.

En el contexto del método de resolución es bastante habitual utilizar la palabra **cláusula** en lugar de la palabra *disyunción*. A cada uno de los disyuntandos de una cláusula se le denomina **literal**.

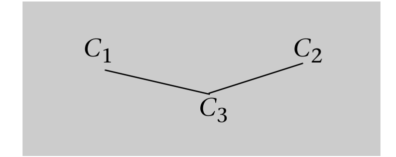
Cuando la regla de resolución se aplica a dos cláusulas se dice que éstas se resuelven entre ellas. Resolver una cláusula contra otra significa aplicarles la regla de resolución. A la cláusula resultante se le denomina **resolvente**.

Cuando dos cláusulas unilíterales como A y $\neg A$ se resuelven una contra otra, la resolvente (□) no contiene ningún literal. Por esta razón, con frecuencia □ se denomina **cláusula vacía**.

Otros símbolos

En algunos textos, veréis que □ también se representa con los símbolos [ ], ⊥ y [⊥].

Cuando dos cláusulas C_1 y C_2 se resuelven entre ellas y dan lugar a la resolvente C_3 este hecho se representa de la manera siguiente:



Podría parecer que una única regla no es suficiente para suplir las reglas básicas de la deducción natural. Aunque este hecho no se demostrará, la regla de resolución puede suplir todas las otras reglas de la deducción natural.

5.1.2. Una única estrategia: la reducción al absurdo

El método de resolución utiliza una única estrategia: la **reducción al absurdo**. Para demostrar que de unas premisas se desprende una conclusión, la reducción al absurdo prueba que de las mismas premisas y de la negación de la conclusión se desprende una contradicción. Si la contradicción se encuentra, el razonamiento es correcto; si la contradicción no se encuentra, entonces no es correcto.

$$A_1, ..., A_n \vdash B \text{ si y sólo si, } A_1, ... A_n, \neg B \vdash \square$$

Recordad que,...

... utilizando la deducción natural, no encontrar la demostración deseada no es sinónimo de invalidez. En cambio, utilizando el método de resolución, no encontrar la contradicción que se busca sí que es sinónimo de invalidez.

5.1.3. Sólo disyunciones: utilización de la forma normal conjuntiva

La regla de resolución sólo se aplica a disyunciones. Para superar esta limitación, el método de resolución exige construir la FNC de todas las premisas y de la negación de la conclusión. Una vez hecho esto, las conjunciones se deben eliminar.

5.2. Aplicación del método de resolución

Para validar o refutar un razonamiento de la forma $A_1, ..., A_n \therefore B$, es necesario: 

1) Considerar $A_1, ..., A_n, \neg B$ (las premisas y la negación de la conclusión).

2) Construir la FNC de cada una de las A_i y de $\neg B$ y eliminar todas las conjunciones. El resultado será un conjunto de cláusulas.

3) Aplicar la regla de resolución a las cláusulas encontradas en el punto anterior y a todas las que resulten, hasta que o bien se encuentre una contradicción ($\square$) o bien ya no se pueda continuar aplicando la regla. Las cláusulas repetidas y los teoremas, si aparecen, no se tienen en consideración.

4) Si se ha encontrado $\square$, entonces el razonamiento es correcto ($A_1, ..., A_n \vdash B$); en caso contrario, el razonamiento no es correcto.

Ejemplo de aplicación del método de resolución

Demostremos la validez del razonamiento $R \vee \neg Q, P, P \to Q \therefore R \wedge Q$ por el método de resolución.

a) Dado que la estrategia es la reducción al absurdo, empecemos por considerar las premisas y la negación de la conclusión: $R \vee \neg Q, P, P \to Q, \neg(R \wedge Q)$.

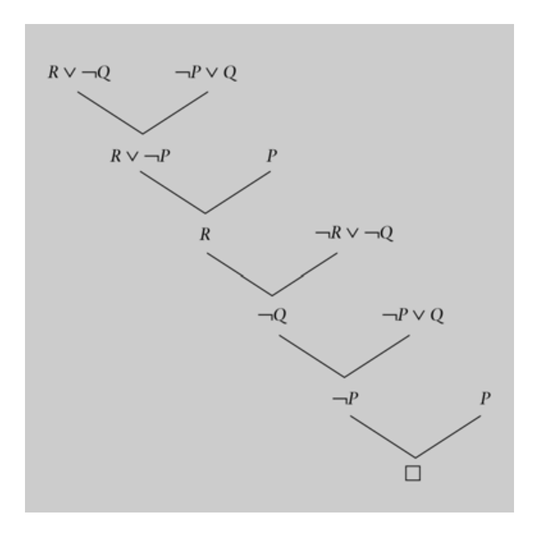
b) Construyamos la FNC de las premisas y la negación de la conclusión:

- $\text{FNC}(R \vee \neg Q) = R \vee \neg Q$

- FNC(P) = P
- FNC($P \to Q$) = $\neg P \vee Q$
- FNC($\neg(R \wedge Q)$) = $\neg R \vee \neg Q$

En este caso, las formas normales conjuntivas son tan simples que no hay conjunciones.

c) A partir del conjunto de cláusulas $S = \{ R \vee \neg Q, P, \neg P \vee Q, \neg R \vee \neg Q \}$ se intenta encontrar una contradicción. Los pasos que hay que hacer hasta llegar a □ se representan en forma de árbol binario invertido (con raíz en la parte inferior), como puede verse en el gráfico siguiente:

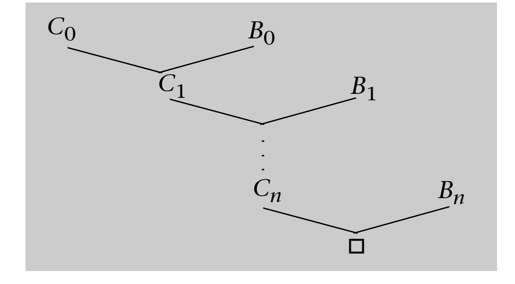


5.3. Resolución lineal

5.3.1. Definición y ejemplo

La **resolución lineal** es una manera de aplicar el método de resolución que pretende ahorrar tantas aplicaciones de la regla de resolución como sea posible.

Dado un conjunto de cláusulas S y una cláusula $C_0 \in S$, se dice que existe una deducción de □ que es lineal, si esta deducción tiene un árbol de resolución de la forma siguiente:



Y cada una de las cláusulas B_i ($i \in [0, n]$) cumple las dos condiciones siguientes: 

* B_i es una cláusula del conjunto original, o bien es una cláusula aparecida previamente en el árbol –una resolvente.

1) $B_i \in S$ o bien B_i es C_j con $j < i$*.

2) B_i ha sido elegida para eliminar el literal que está más a la derecha de la cláusula C_i.

A las C_i ($i \in [0, n]$) se las denomina **cláusulas troncales** y a las B_i ($i \in [0, n]$) se las denomina **cláusulas laterales**. Al árbol resultante se le denomina **árbol de resolución lineal**.

Ejemplo de resolución lineal

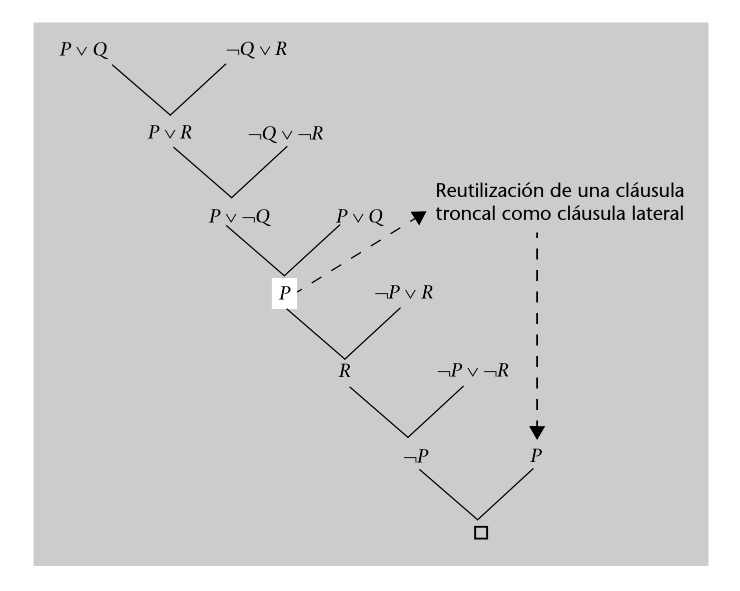
Demostremos la validez del razonamiento siguiente:

$$\neg P \rightarrow Q\,,\ (\neg P \wedge \neg Q) \vee R,\ Q \rightarrow \neg R \ \therefore\ P \wedge R.$$

El resultado de transformar las premisas y la negación de la conclusión a FNC y posteriormente eliminar las conjunciones es el conjunto de cláusulas siguiente:

$$S = \{P \vee Q\,,\ \neg P \vee R,\ \neg Q \vee R,\ \neg Q \vee \neg R,\ \neg P \vee \neg R\}.$$

Un posible árbol de resolución lineal sería el que presentamos a continuación:



5.3.2. Replanteamiento de la última decisión

Para afirmar que un razonamiento no es correcto se debe garantizar que □ no se puede encontrar, pero para garantizarlo se debe poder asegurar que se ha hecho todo lo posible, sin éxito.

El replanteamiento de la última decisión...

... es una técnica algorítmica bastante conocida. En el contexto de la programación es habitual designarla con el término inglés *backtracking* que, a menudo, se traduce por 'vuelta atrás' o 'prueba y error'.

La técnica que denominamos **replanteamiento de la última decisión** garantiza la sistematicidad de la resolución lineal. Esta técnica consiste en anotar todas las decisiones que se toman y, para cada decisión, las posibles alternativas. Cuando se llega a un punto en el que no se puede continuar, se revoca la última de las decisiones tomadas que todavía tenga una alternativa no considerada y se continúa a partir de aquel punto.

Ejemplo de replanteamiento de la última decisión

Como en otros casos, un ejemplo ayudará a ilustrar el concepto de replanteamiento de la última decisión. Dado el conjunto de cláusulas $S = \{ \neg P \vee R, Q, \neg P \vee S, R, \neg Q \vee S, \neg R \vee \neg S \}$ pretendemos encontrar $\square$ aplicando el método de resolución lineal.

a) La primera decisión que hay que tomar es qué cláusula se elige inicialmente. Cualquier elección de cláusulas se hará de izquierda a derecha, así que la cláusula inicial será $\neg P \vee R$. Evidentemente, esta decisión puede ser revocada. Si fuese necesario volver a elegir una cláusula inicial, sería la segunda y así sucesivamente hasta llegar a la última.

$\neg P \vee R$ (decisión con alternativa).

b) La segunda decisión que hay que tomar es qué cláusula se resuelve contra la elegida en el punto anterior. Las cláusulas que pueden ser utilizadas son las que contienen el literal $\neg R$. Sólo la cláusula $\neg R \vee \neg S$ cumple esta condición y, por tanto, esta elección no tiene alternativas.

Recordad que...

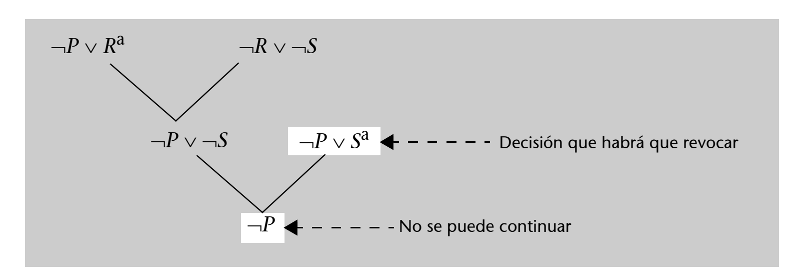
... el objetivo siempre es eliminar el literal de más a la derecha de la cláusula troncal.

$\neg P \vee R$[a] $\neg R \vee \neg S$

$\neg P \vee \neg S$

a: decisión con alternativa.

c) La decisión siguiente que se debe tomar es la cláusula que se resuelve contra $\neg P \vee \neg S$. De izquierda a derecha, las cláusulas que pueden ser utilizadas son $\neg P \vee S$ y $\neg Q \vee S$. Se elige la primera y se deja la segunda como alternativa.



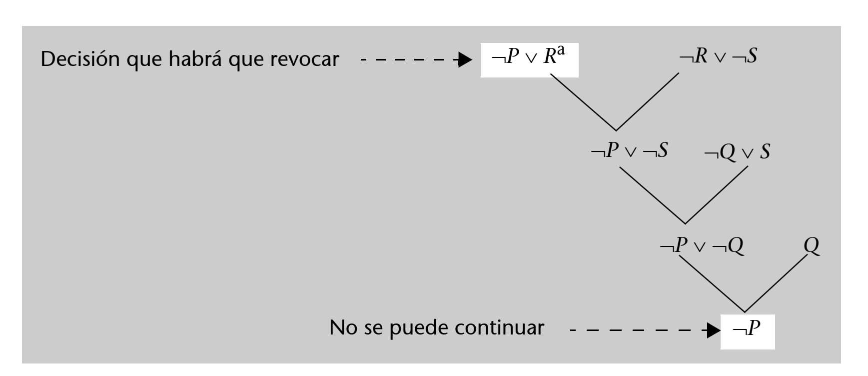
a: decisión con alternativa.

d) Ninguna cláusula se puede resolver contra $\neg P$. Será necesario, pues, revocar la última de las decisiones que tiene alguna alternativa y considerar en su lugar esta alternativa. Concretamente, se tendrá que sustituir la cláusula $\neg P \vee S$ por $\neg Q \vee S$ y continuar a partir de este punto. Notad que esta elección ya no tendrá alternativa, porque $\neg Q \vee S$ es la última de las cláusulas que pueden ser resueltas contra $\neg P \vee \neg S$. Si resolvemos $\neg P \vee \neg S$ con $\neg Q \vee S$ se obtiene la cláusula $\neg P \vee \neg Q$. Sólo Q es útil para ser resuelta con $\neg P \vee \neg Q$.

Para no alargar innecesariamente el ejemplo, a partir de este momento sólo se indicarán los puntos que tienen alternativas y, cuando sea preciso, las decisiones que se deben revocar.

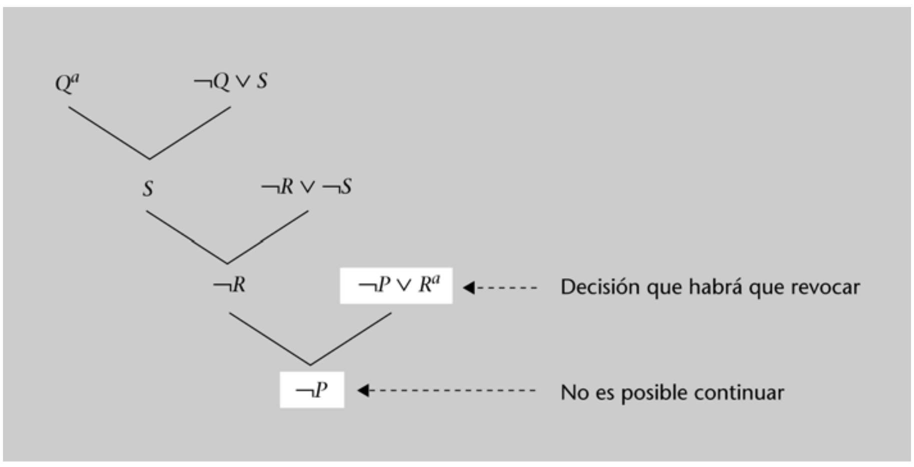
El replanteamiento de la última decisión...

... no afecta al literal que hay que eliminar, que siempre es el de más a la derecha. Las cláusulas no se deben reordenar nunca.



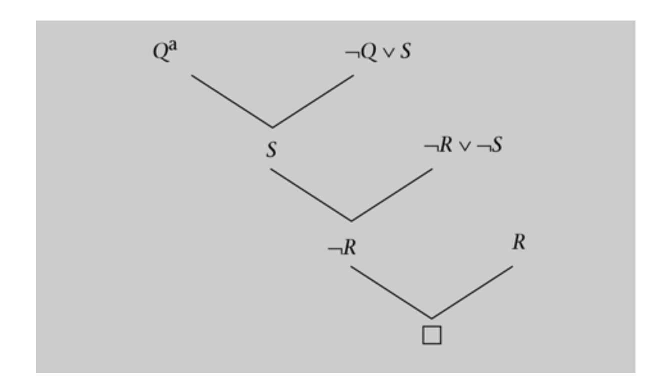
a: decisión con alternativa.

e) En este punto se revoca la elección de la cláusula inicial. La alternativa siguiente es Q. Sólo $\neg Q \vee S$ puede resolverse contra Q. La resolvente es S. Sólo $\neg R \vee \neg S$ puede resolverse contra S y la resolvente es $\neg R$. Para resolver contra $\neg R$ encontramos las cláusulas $\neg P \vee R$ y R. Elegimos la primera que encontramos:



a: decisión con alternativa.

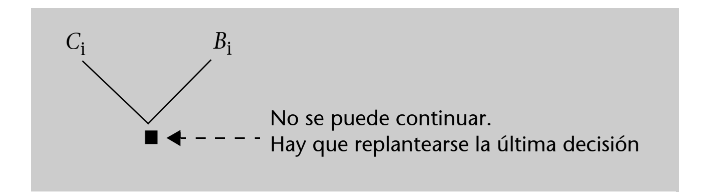
f) La última decisión con alternativa es la elección de la cláusula $\neg P \vee R$. La alternativa era la cláusula R con esta cláusula:



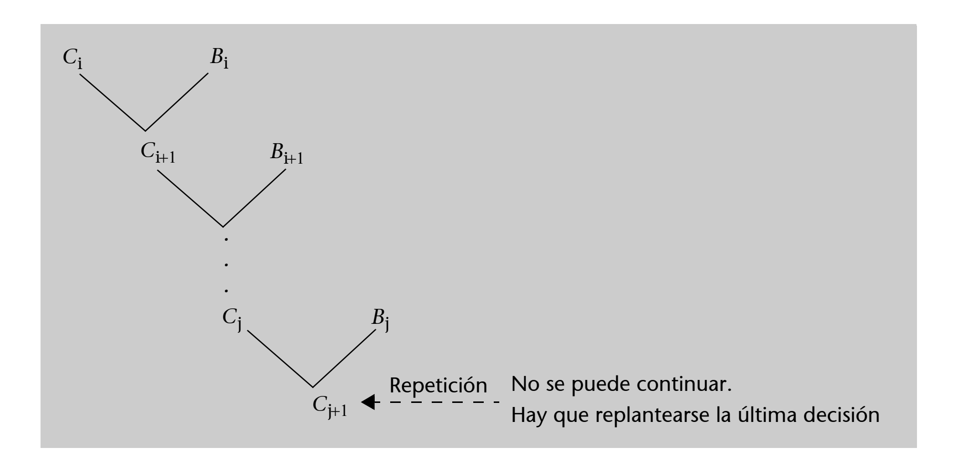
Una vez encontrada la contradicción (□), el ejemplo concluye.

Además de la imposibilidad de encontrar una cláusula que elimine el literal de más a la derecha de la última cláusula troncal, hay dos situaciones más que obligan a replantear la última decisión: ❗

1) La aparición de un teorema como cláusula troncal:



2) La repetición de una cláusula aparecida previamente en el mismo árbol, como vemos a continuación:



Cuando se han considerado todas las alternativas y no se ha llegado a encontrar □, entonces se puede afirmar que el razonamiento no es correcto.

5.3.3. La estrategia del conjunto de apoyo

La estrategia del conjunto de apoyo es una regla heurística* que con frecuencia permite acelerar el proceso de obtención de □. En otros casos, quizá no lo acelera, pero puede ser útil para detectar que, si el razonamiento que se intenta validar es correcto, lo es porque sus premisas son inconsistentes.

Conjunto de apoyo

Conjunto de apoyo es el nombre que se da al subconjunto de cláusulas obtenidas de la negación de la conclusión.

*** Una regla heurística es una regla que es correcta la mayoría de las veces.**

> La **estrategia del conjunto** de apoyo se materializa en la recomendación siguiente: a la hora de aplicar el método de resolución, es necesario empezar por elegir cláusulas que formen parte de la negación de la conclusión.

El porqué de esta recomendación es el siguiente: por un lado, el método de resolución está basado en la estrategia de reducción al absurdo. Para validar el ra-

zonamiento $A_1, ..., A_n \therefore B$ se intenta validar el razonamiento $A_1, ..., A_n \neg B \therefore \square$ porque el primero es válido si, y sólo si, el segundo también lo es. Por otro lado, si las premisas son consistentes ($A_1, ..., A_n \nvdash \square$), por sí solas no permitirán llegar a $\square$. De este modo, es razonable pensar que si el razonamiento es correcto, lo que permitirá llegar a $\square$ será la mezcla de las premisas con la negación de la conclusión. Cuanto antes empecemos a utilizar las cláusulas de la negación de la conclusión, antes se llegará a $\square$.

La estrategia del proceso demostrativo

Empezar a resolver a partir de cláusulas de la negación de la conclusión es equivalente a seguir una estrategia dirigida por la conclusión: es ésta la que guía el proceso demostrativo.

Desde un punto de vista práctico, la estrategia del conjunto de apoyo puede aplicarse de la forma siguiente: se elige como cláusula de inicio la primera del conjunto de apoyo. Si esta cláusula no permite llegar a $\square$, debe intentarse con el resto de las cláusulas del conjunto de apoyo. Con esto, se llegará a una de estas dos situaciones:

a) Se obtiene $\square$. Esto quiere decir que el razonamiento es válido. Si sólo estamos interesados en demostrar su validez, ya no es necesario hacer nada más. Si además queremos saber si la validez del razonamiento se deriva de la inconsistencia de las premisas, será necesario estudiar, a parte, esta posibilidad.

b) Ninguna de las cláusulas del conjunto de apoyo permite obtener $\square$. En este caso se tiene una de estas dos situaciones:

- El razonamiento no es válido.
- El razonamiento es válido, pero porque las premisas son inconsistentes.

A priori no puede decirse cuál de las dos situaciones se da realmente. Para saberlo, será necesario determinar si las premisas del razonamiento son o no inconsistentes.

Para saber si las premisas de un razonamiento son inconsistentes, puede utilizarse el **método de resolución**. Como conjunto de cláusulas se considera sólo las cláusulas de las premisas, sin hacer intervenir ninguna cláusula de la negación de la conclusión. Si se llega a obtener $\square$, las premisas son inconsistentes. En caso contrario no lo son.

Ejemplos

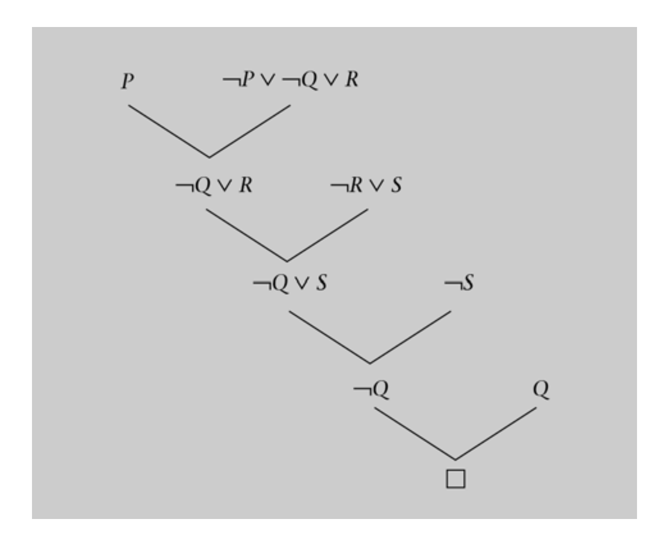
1) Se quiere averiguar si el razonamiento $P \wedge Q \to R, R \to S, Q \wedge \neg S \therefore \neg P$ es válido.

Notación

En estos ejemplos, se va a utilizar la letra negrita para destacar las cláusulas que forman parte del conjunto de apoyo.

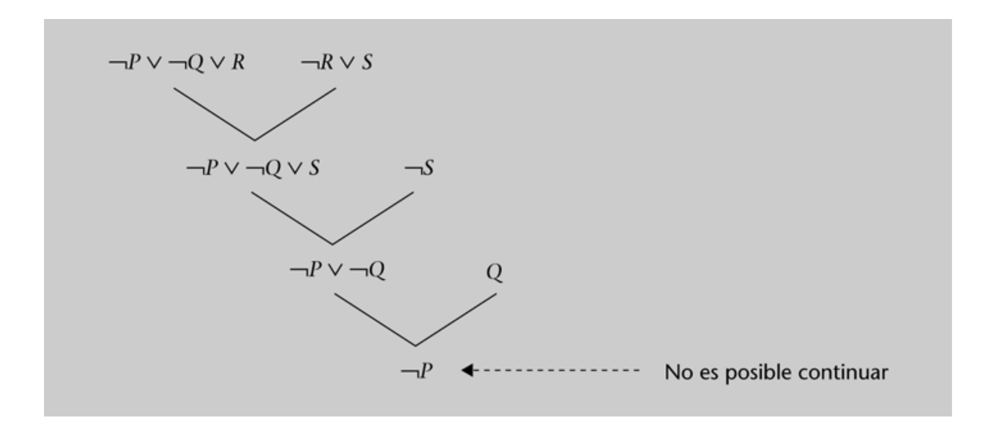
El conjunto de cláusulas resultante es $\{ \neg P \vee \neg Q \vee R, \neg R \vee S, Q, \neg S, \mathbf{P} \}$. El conjunto de apoyo contiene sólo la cláusula P.

Si elegimos *P* para empezar a resolver, se obtiene el árbol de resolución siguiente:

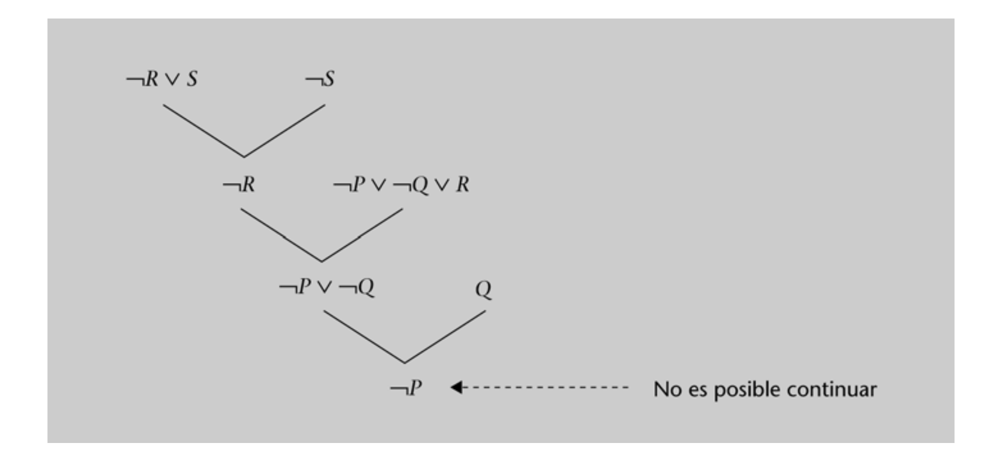


El razonamiento queda así validado. Si además se quisiera saber si la validez es fruto de la inconsistencia de las premisas, sería necesario también ver si el conjunto $\{\neg P \vee \neg Q \vee R, \neg R \vee S, Q, \neg S\}$ permite llegar a □. En este caso, la respuesta es negativa porque ningún árbol de resolución permite obtener □.

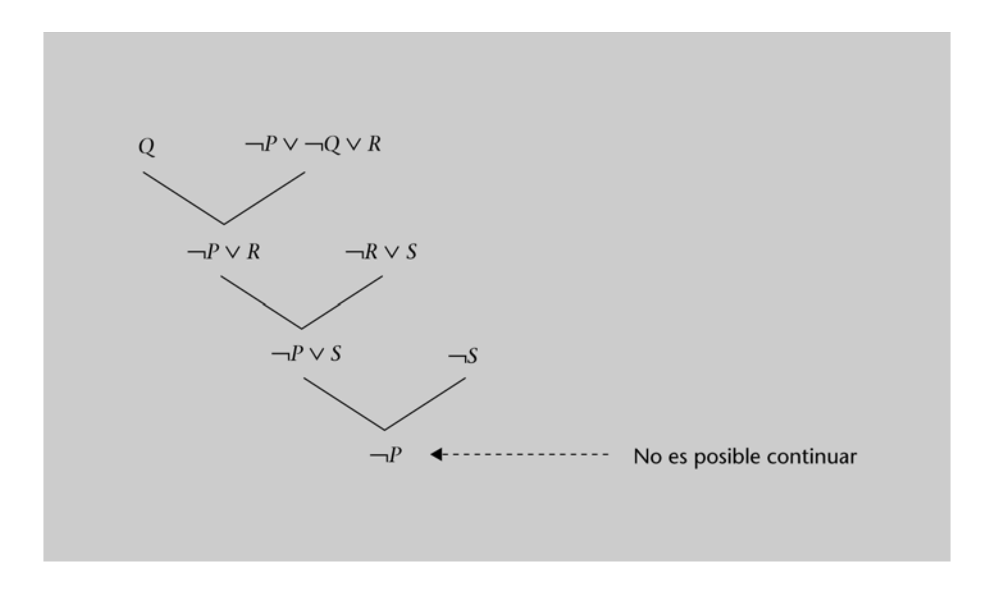
- Empezando a resolver con $\neg P \vee \neg Q \vee R$:



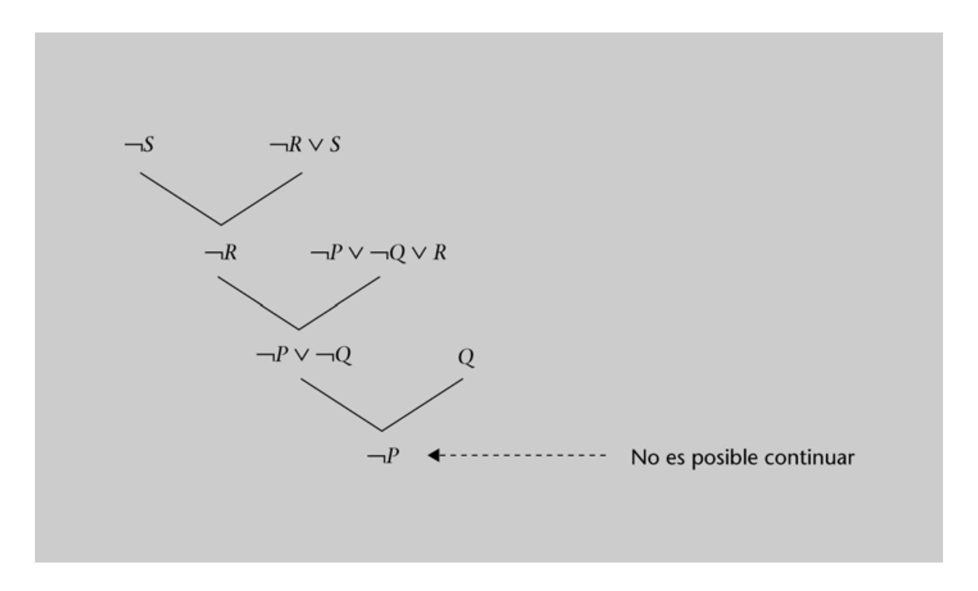
- Empezando a resolver con $\neg R \vee S$:



- Empezando a resolver con Q:

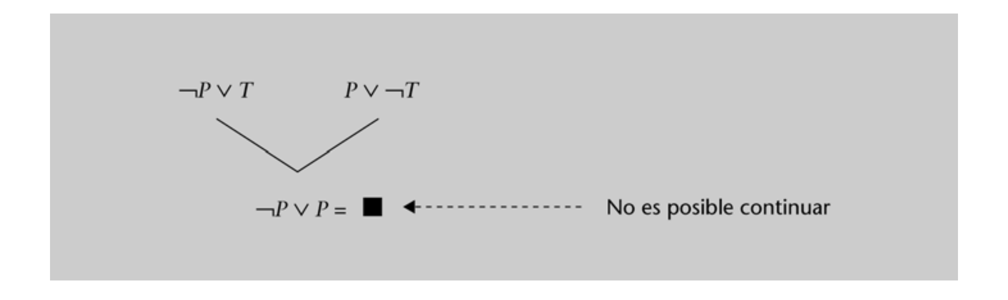


- Empezando a resolver con $\neg S$:

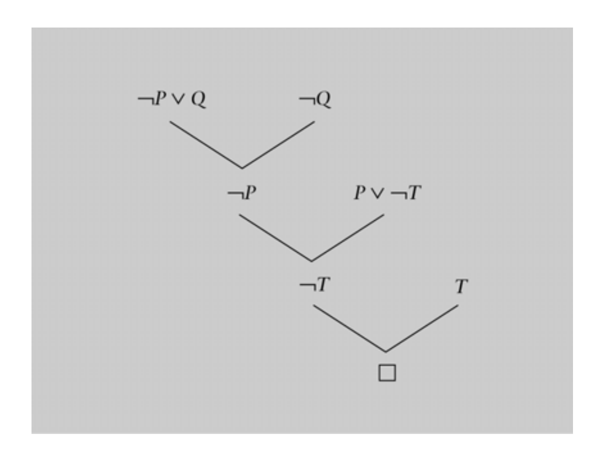


2) Se quiere descubrir si $P \to Q \wedge S$, $\neg(T \to Q)$, $\neg P \to \neg T$ $\therefore$ $S \to P \wedge \neg T$ es un razonamiento válido o no. El conjunto de cláusulas que resulta es el siguiente: $\{ \neg P \vee Q, \neg P \vee S, T, \neg Q, P \vee \neg T, \boldsymbol{S}, \neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{T} \}$.

- Si se elige S como primera cláusula, no puede hacerse nada, porque en el conjunto no hay ninguna aparición del literal $\neg S$.
- Si se elige $\neg P \vee T$ como primera cláusula, tampoco se llega a □:



Llegados a este punto, ya puede afirmarse que el razonamiento sólo puede ser válido si las premisas son inconsistentes. Para ver si lo son o no, se intentará llegar a □ a partir del conjunto { $\neg P \vee Q$, $\neg P \vee S$, T, $\neg Q$, $P \vee \neg T$ }:



Ahora ya sabemos que el razonamiento es válido y que lo habría sido con cualquier otra conclusión porque las premisas no eran consistentes. Observad la demostración siguiente por deducción natural:

(1)	$P \rightarrow Q \wedge S$	**P**
(2)	$\neg(T \rightarrow Q)$	**P**
(3)	$\neg P \rightarrow \neg T$	**P**
(4)	$T \wedge \neg Q$	**ED 2**
(5)	T	**E**$\wedge$ 4
(6)	P	**MT** 3, 5
(7)	$Q \wedge S$	**E**$\rightarrow$ 1, 6
(8)	Q	**E**$\wedge$ 7
(9)	$\neg Q$	**E**$\wedge$ 4
(10)	$S \rightarrow P \wedge \neg T$	**QS** 8, 9

3) Se quiere saber si el razonamiento $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow S$, $S \therefore P$ es o no válido. El conjunto de cláusulas resultante es { $\neg P \vee Q$, $\neg Q \vee S$, S, $\neg \boldsymbol{P}$ }. Si se intenta iniciar la resolución con la cláusula $\neg P$ no puede hacerse nada porque el literal P no aparece en ninguna otra cláusula del conjunto.

Ya puede afirmarse que el razonamiento no es válido o que, si lo es, lo es por la inconsistencia de las premisas. Sin embargo, el conjunto { $\neg P \vee Q$, $\neg Q \vee S$, S } no permite llegar a la cláusula vacía.

- Empezando a resolver con $\neg P \vee Q$:

¬P ∨ Q ¬Q ∨ S

¬P ∨ S ← No es posible continuar

- Con $\neg Q \vee S$ no se puede empezar a resolver porque en ningún lugar aparece el literal $\neg S$.
- Con S no se puede empezar a resolver por la misma razón.

Luego el razonamiento no es válido.

5.4. Simplificación del conjunto de cláusulas

No siempre todas las cláusulas del conjunto son útiles para la obtención de $\square$. Si las cláusulas inútiles se descartan antes de empezar a aplicar el método, puede acelerarse la consecución de $\square$ (la validación del razonamiento) o la constatación de que no se puede obtener $\square$ (la refutación del razonamiento).

A continuación daremos un par de reglas bastante útiles para descartar cláusulas inútiles.

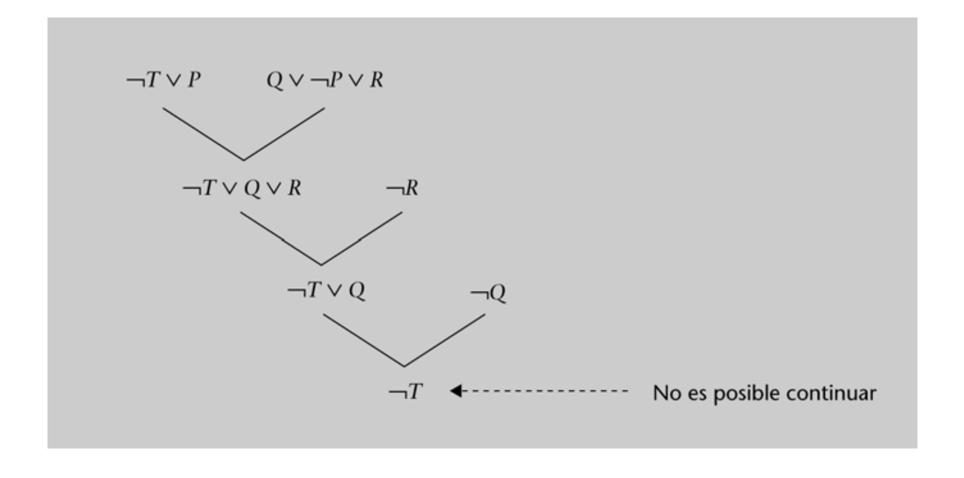
5.4.1. Regla del literal puro

Un **literal** es **no eliminable** cuando es positivo y no aparece en forma negativa en ninguna otra cláusula; o al revés, cuando es negativo y no aparece en forma positiva en cualquier otra cláusula. La **regla del literal puro** establece que las cláusulas que contienen literales no eliminables pueden descartarse.

Cuando se utilizan cláusulas que contienen literales no eliminables, tarde o temprano se llega a una situación en la que no es posible continuar y hay que replantearse la última decisión.

Ejemplo de situación de bloqueo

En el conjunto $\{ \neg T \vee P, Q \vee \neg P \vee R, R \vee P \vee \neg S, \neg R, S, \neg Q \}$, la cláusula $\neg T \vee P$ puede descartarse porque no hay ninguna otra cláusula que contenga el literal T. Cualquier utilización de $\neg T \vee P$ desembocará en una situación de bloqueo. Por ejemplo:



A veces, la regla del literal puro permite llegar a demostrar que un razonamiento es no válido sin necesidad de llegar a aplicar la regla de resolución una sola vez.

Ejemplo de aplicación de la regla del literal puro

Consideremos el razonamiento: $S \vee T$, $P \rightarrow Q$, $S \vee T \rightarrow \neg P$, $Q \rightarrow T \therefore \neg Q$.

El conjunto de cláusulas que se obtiene es: $\{ S \vee T, \neg P \vee Q, \neg S \vee \neg P, \neg T \vee \neg P, \neg Q \vee T, Q \}$. Entonces:

a) Se observa que el literal P no aparece en ninguna cláusula, de modo que todas las cláusulas que contienen el literal $\neg P$ resultan inútiles. Descartadas las cláusulas que contienen este literal, el conjunto se reduce a: $\{ S \vee T, \neg Q \vee T, Q \}$.

b) Ahora se observa que en el conjunto $\{ S \vee T, \neg Q \vee T, Q \}$ la cláusula $S \vee T$ es prescindible por ausencia del literal $\neg S$ (de hecho, también es prescindible por ausencia del literal $\neg T$). Esto reduce el conjunto a: $\{ \neg Q \vee T, Q \}$.

c) En el conjunto $\{ \neg Q \vee T, Q \}$, la cláusula $\neg Q \vee T$ puede descartarse por ausencia del literal $\neg T$, lo cual reduce el conjunto a $\{ Q \}$ y este conjunto no permite obtener $\square$.

Otras veces, la aplicación de esta regla permite descubrir que hay premisas que no son necesarias para validar el razonamiento.

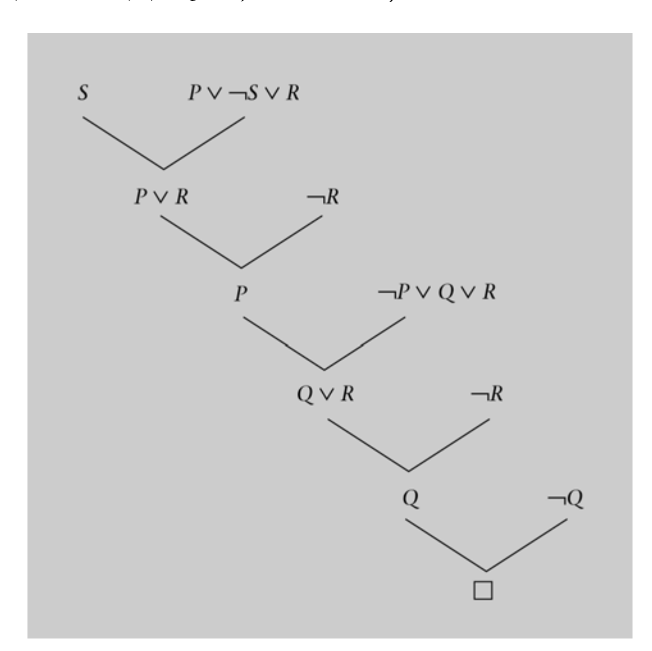
Ejemplo de aplicación de la regla del literal puro

Consideremos el razonamiento: $P \wedge \neg Q \rightarrow R$, $\neg P \wedge S \rightarrow R$, $T \rightarrow P \wedge R \therefore S \wedge \neg Q \rightarrow R$.

El conjunto de cláusulas que resulta es: $\{ \neg P \vee Q \vee R, P \vee \neg S \vee R, \neg T \vee P, \neg T \vee R, S, \neg Q, \neg R \}$.

Las cláusulas $\neg T \vee P$ y $\neg T \vee R$ son prescindibles, lo cual reduce el conjunto al siguiente: $\{ \neg P \vee Q \vee R, P \vee \neg S \vee R, S, \neg Q, \neg R \}$. Con este conjunto:

La tercera premisa no es necesaria para nada.



El razonamiento es válido, pero la tercera premisa ($T \rightarrow P \wedge R$) es superflua. Observad la siguiente deducción natural:

(1)	$P \wedge \neg Q \rightarrow R$	**P**
(2)	$\neg P \wedge S \rightarrow R$	**P**
(3)	$T \rightarrow P \wedge R$	**P** (superflua)

(4)		$S \wedge \neg Q$		**H**
(5)		$P \vee \neg P$		**TE**
(6)			P	**H**
(7)			$\neg Q$	**E**$\wedge$ 4
(8)			$P \wedge \neg Q$	**I**$\wedge$ 6, 7
(9)			R	**E**$\rightarrow$ 1, 8
(10)			$\neg P$	**H**
(11)			S	**E**$\wedge$ 4
(12)			$\neg P \wedge S$	**I**$\wedge$ 10, 11
(13)			R	**E**$\rightarrow$ 2, 12
(14)		R		**E**$\vee$ 5, 9, 13
(15)	$S \wedge \neg Q \rightarrow R$			**I**$\rightarrow$ 4, 14

5.4.2. Regla de subsunción

Si se tienen dos cláusulas C_1 y C_2 en las que todos los literales de C_1 también aparecen en C_2 se dice que la cláusula **C_1 subsume la cláusula C_2** (o que la cláusula **C_2 es subsumida por la cláusula C_1**).

Ejemplos de subsunción de cláusulas

La cláusula $P \vee Q$ subsume la cláusula $P \vee \neg R \vee Q$ porque todos los literales de la primera aparecen en la segunda.

La cláusula $\neg R$ subsume la cláusula $S \vee \neg R \vee T$ porque todos los literales de la primera aparecen en la segunda.

La cláusula $S \vee T$ no subsume la cláusula $S \vee P \vee \neg T$ porque no todos los literales de la primera aparecen en la segunda (el literal T de la primera cláusula no aparece en la segunda).

La cláusula subsumida

Cuando una cláusula subsume otra, la cláusula subsumida es siempre la más larga (la que contiene más literales).

La **regla de subsunción** afirma que en un conjunto de cláusulas, aquellas que son subsumidas por otras pueden descartarse.

Las cláusulas descartadas

Las cláusulas que se descartan son las subsumidas, y en consecuencia, las más largas.

La razón por la cual la cláusula que contiene todos los literales de la otra puede descartarse es que si todos los literales de C_1 aparecen en C_2, entonces $C_1 \vdash C_2$ (C_2 se obtiene por aplicación de la regla **I**$\vee$ a C_1). Cualquier cosa que sea demostrable utilizando C_2, también se podrá demostrar utilizando C_1. En los ejemplos vistos: $P \vee Q \vdash P \vee \neg R \vee Q$ y $\neg R \vdash S \vee \neg R \vee T$, mientras que: $S \vee T \nvdash S \vee P \vee \neg T$.

Ejemplos

1) Se quiere saber si el razonamiento siguiente es válido:

$$\neg Q \rightarrow P,\ Q \wedge P \rightarrow \neg T,\ T \vee \neg Q \rightarrow \neg P\ \therefore\ \neg T \vee \neg P.$$

El conjunto de cláusulas que se obtiene es:

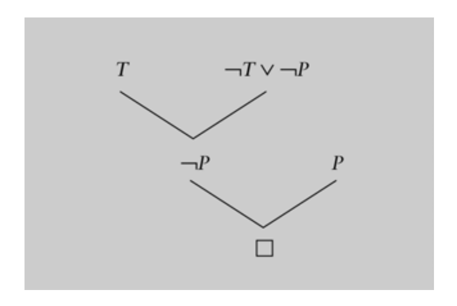
$$\{\ Q \vee P,\ \neg Q \vee \neg P \vee \neg T,\ \neg T \vee \neg P,\ Q \vee \neg P,\ T,\ P\ \}.$$

Se observan las subsunciones siguientes:

- La cláusula $Q \vee P$ es subsumida por la cláusula P.
- La cláusula $\neg Q \vee \neg P \vee \neg T$ es subsumida por la cláusula $\neg T \vee \neg P$.

Con esto, el conjunto se reduce a $\{ \neg T \vee \neg P, Q \vee \neg P, T, P \}$ y la aplicación de la regla del literal puro permite descartar la cláusula $Q \vee \neg P$ y queda: $\{ \neg T \vee \neg P, T, P \}$.

El razonamiento es válido porque:



De las cláusulas de las premisas, sólo se ha utilizado $\neg T \vee \neg P$. Esto quiere decir que la primera premisa y la segunda son superfluas. En efecto:

(1)	$\neg Q \to P$		**P** (superflua)
(2)	$Q \wedge P \to \neg T$		**P** (superflua)
(3)	$T \vee \neg Q \to \neg P$		**P**
(4)		$T \wedge P$	**H**
(5)		T	**E**$\wedge$ 4
(6)		$T \vee \neg Q$	**I**$\vee$ 5
(7)		$\neg P$	**E**$\to$ 3, 6
(8)		P	**E**$\wedge$ 4
(9)	$\neg(T \wedge P)$		**I**$\neg$ 4, 7,8
(10)	$\neg T \vee \neg P$		**ED** 9

2) Se quiere saber si el razonamiento $P \vee Q \to R \wedge S, T \to P, R \to \neg S, \neg T \therefore \neg Q$ es o no correcto y, si lo es, si sus premisas son o no inconsistentes. El conjunto de cláusulas con el que hay que empezar a trabajar es:

$$\{ \neg P \vee R, \neg Q \vee R, \neg P \vee S, \neg Q \vee S, \neg T \vee P, \neg R \vee \neg S, \neg T, Q \}.$$

- La regla de subsunción permite descartar la cláusula $\neg T \vee P$ (la cláusula $\neg T$ la subsume). Esto reduce el conjunto a:

$$\{ \neg P \vee R, \neg Q \vee R, \neg P \vee S, \neg Q \vee S, \neg R \vee \neg S, \neg T, Q \}.$$

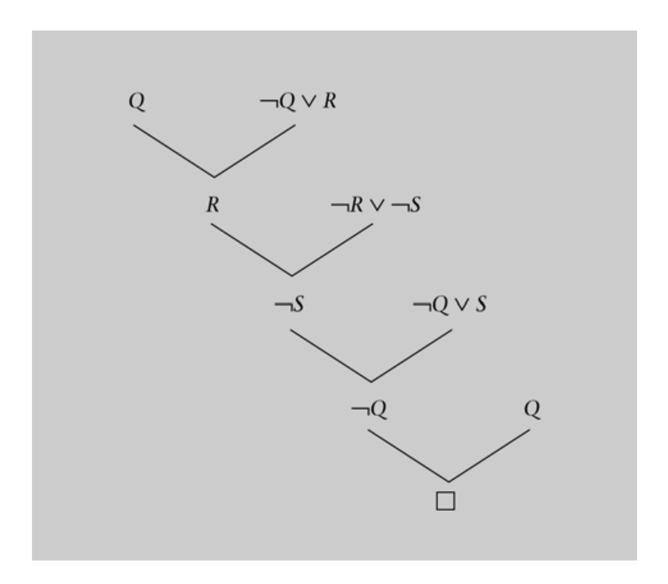
- Al descartar $\neg T \vee P$ el conjunto deja de contener el literal P, con lo cual la regla del literal puro permite descartar todas las cláusulas que contienen $\neg P$. Ahora el conjunto queda:

$$\{ \neg Q \vee R, \neg Q \vee S, \neg R \vee \neg S, \neg T, Q \}.$$

- La cláusula $\neg T$ también puede descartarse porque no hay ninguna aparición del literal T. Finalmente, el conjunto que hay que considerar es:

$$\{ \neg Q \vee R, \neg Q \vee S, \neg R \vee \neg S, Q \}.$$

Con este conjunto de cláusulas se prueba que el razonamiento es correcto:



Para determinar si las premisas son o no inconsistentes se considera el conjunto siguiente (cláusulas derivadas de las premisas; la cláusula derivada de la negación de la conclusión no se considera):

$$\{ \neg P \vee R, \neg Q \vee R, \neg P \vee S, \neg Q \vee S, \neg T \vee P, \neg R \vee \neg S, \neg T \}$$

- $\neg T$ subsume $\neg T \vee P$.
- La cláusulas que contienen $\neg P$ se descartan. El conjunto queda:

$$\{ \neg Q \vee R, \neg Q \vee S, \neg R \vee \neg S, \neg T \}.$$

- Las cláusulas que contienen $\neg Q$ también se descartan. El conjunto se reduce a: $\{ \neg R \vee \neg S, \neg T \}$. Este conjunto no permite llegar a $\square$.

Dado que el conjunto de cláusulas derivadas de las premisas no permite la obtención de $\square$, podemos afirmar que estas premisas no son inconsistentes.

Observad que para validar el razonamiento sólo son necesarias las premisas que originan las cláusulas $\neg Q \vee R$, $\neg R \vee \neg S$ y $\neg Q \vee S$, es decir, $P \vee Q \rightarrow R \wedge S$ y $R \rightarrow \neg S$. Además, el hecho de que $\neg T$ (cuarta premisa) subsuma $\neg T \vee P$ (de la segunda premisa) indica que la segunda premisa es una consecuencia lógica de la cuarta. En efecto: $\neg T \vdash T \rightarrow P$.

Resumen

En este módulo didáctico hemos presentado el objeto de interés de la lógica: los **razonamientos**. Hemos argumentado la necesidad de un lenguaje formal para poderlos expresar de una manera compacta y libre de las ambigüedades del lenguaje natural. El lenguaje estudiado ha sido el lenguaje de enunciados que, a partir de **átomos** y **conectivas***, permite la **formalización**** de algunos razonamientos expresados en lenguaje natural.

* Elementos básicos del lenguaje de enunciados.
** Traducción de los razonamientos al lenguaje de enunciados.

Posteriormente, hemos definido el concepto de **razonamiento correcto** y hemos estudiado la **deducción natural** y sus reglas como método para decidir si un razonamiento es correcto. La deducción natural también permite definir otros conceptos importantes como la **equivalencia deductiva*** y los **teoremas****.

* Se puede entender como la igualdad de los enunciados.
** Los enunciados válidos en cualquier circunstancia.

Dado que la deducción natural es un método de validación, pero no de refutación*, hemos introducido las **tablas de verdad** como método para encontrar **contraejemplos** que muestren situaciones que pongan de manifiesto la invalidez de un razonamiento.

* Refutar quiere decir demostrar la invalidez.

El estudio del álgebra de los enunciados (un álgebra de Boole) nos ha permitido definir las **formas normales conjuntiva y disyuntiva**. Esta última es de especial importancia a la hora de aplicar el método de resolución.

Y, finalmente, hemos estudiado el **método de resolución**, concebido para mecanizar de una manera simple los procesos de validación y refutación de razonamientos.

Ejercicios de autoevaluación

1. Decid cuáles de estas listas de símbolos corresponden a enunciados correctamente escritos. En algunos casos es posible que se haya eliminado paréntesis innecesarios:

a) $(A \rightarrow (BC))$
b) $((A \wedge B) \rightarrow ((\neg A) \vee (C \rightarrow D)))$
c) $(((A \rightarrow B)(\neg C)) \wedge A)$
d) $A \rightarrow \vee B \wedge C \rightarrow D$
e) $A \rightarrow \neg B \wedge C \rightarrow D \vee A$

2. Suprimid todos los paréntesis innecesarios:

a) $((\neg(A \wedge (\neg B))) \wedge (\neg(C \vee D)))$
b) $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \rightarrow ((\neg C) \vee D))$
c) $((((A \wedge B) \vee (\neg C)) \rightarrow D) \rightarrow (\neg C))$
d) $((\neg(\neg A)) \vee ((\neg(B \wedge C)) \wedge D))$
e) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow D)$

3. Reescribid los enunciados con paréntesis para indicar las prioridades de las conectivas (el objetivo es que quede perfectamente claro cuál es el orden en el que hay que leer los enunciados. Si queréis, podéis prescindir de los paréntesis más externos y de los que rodean negaciones).

a) $\neg A \wedge B \rightarrow C \vee D$
b) $A \wedge B \rightarrow C \vee \neg D$
c) $A \rightarrow B \vee C \wedge \neg D$
d) $A \rightarrow B \wedge \neg C \rightarrow D$
e) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

4. Identificad los átomos y formalizad los enunciados siguientes:

a) Si como demasiado o me tomo un café, no puedo dormir.
b) Siempre que la vajilla china de porcelana se lava con agua demasiado caliente se rompen un par de platos.
c) Si haces los deberes, no te castigan; y si no (los haces), sí (te castigan).
d) Cuando voy a la playa, leo el diario o me baño (pero no las dos cosas).

5. Identificad los átomos y formalizad los enunciados siguientes:

a) Cuando llueve y hace sol, sale el arco iris y estoy contento.
b) Si cuando llueve hace sol, entonces sale el arco iris y estoy contento.
c) Cuando llueve y sale el arco iris, estoy contento si hace sol.
d) Llueve, hace sol, sale el arco iris y estoy contento.
e) Cuando no llueve, no sale el arco iris y no estoy contento si no hace sol.
f) Cuando no llueve no sale el arco iris, y no estoy contento si no hace sol.
g) Sale el arco iris cuando llueve, si hace sol.
h) Estoy contento cuando sale el arco iris, siempre que cuando llueve hace sol.

6. Formalizad las frases siguientes utilizando los átomos indicados entre paréntesis:

a) Cuando oigo hablar de los últimos acontecimientos, ni entiendo lo que pasa ni siento simpatía por las personas involucradas (*S*: "Oigo hablar de los últimos acontecimientos"; *E*: "Entiendo lo que pasa"; *I*: "Siento simpatía por las personas involucradas").
b) Si voy a pie me canso y cuando voy en coche no encuentro aparcamiento (*P*: "Voy a pie"; *C*: "Me canso"; *A*: "Voy en coche"; *T*: "Encuentro aparcamiento").
c) Si voy en coche, encuentro aparcamiento cuando llego pronto (*C*: "Voy en coche"; *A*: "Encuentro aparcamiento"; *B*: "Llego pronto").
d) Si voy en coche, necesito llegar pronto para encontrar aparcamiento (utilizad los mismos átomos que en el punto anterior).
e) Si hay que llevar la calculadora para aprobar, entonces es necesario recordar las fórmulas para poder estar tranquilo (*C*: "Se lleva la calculadora"; *A*: "Se aprueba"; *F*: "Se recuerdan las fórmulas"; *T*: "Se puede estar tranquilo").
f) Es necesario llevar la gabardina para no mojarse cuando llueve o nieva (*G*: "Se lleva la gabardina"; *M*: "Se moja"; *P*: "Llueve"; N: "Nieva").
g) Si saltas, tocarás el techo si estiras la mano; y si te agachas, tocarás las baldosas o las patas de la silla (*S*: "Saltas"; *T*: "Tocas el techo"; *M*: "Estiras la mano"; *A*: "Te agachas"; *R*: "Tocas las baldosas"; *P*: "Tocas las patas de la silla").
h) Su rendimiento es bueno si su comportamiento es impecable, excepto cuando está enamorado (*B*: "Su rendimiento es bueno"; *I*: "Su comportamiento es impecable"; *E*: "Está enamorado").

7. Formalizad los siguientes enunciados, utilizando los átomos indicados entre paréntesis:

a) Sólo cuando llueve te mojas (*P*: "Llueve"; *M*: "Te mojas").
b) Los peatones sólo atraviesan la calle cuando el semáforo está en verde (*T*: "Los peatones atraviesan la calle"; *V*: "El semáforo está en verde").

c) Si las plazas del avión están cubiertas, has de ser ministro para poder volar (*P*: "Las plazas del avión están cubiertas"; *M*: "Eres ministro"; *V*: "Puedes volar").
d) Si, y sólo si, eres bueno, podrás ir a Disneylandia (*B*: "Eres bueno"; *D*: "Puedes ir a Disneylandia").
e) Es necesario estudiar mucho para obtener el aprobado, cuando la asignatura que cursas es difícil (*E*: "Estudias mucho"; *O*: "Obtienes el aprobado"; *D*: "La asignatura que cursas es difícil").
f) Es necesario que los sindicatos y el gobierno se pongan de acuerdo para que los trabajadores reciban un aumento de sueldo (*A*: "Los sindicatos y el gobierno se ponen de acuerdo"; *T*: "Los trabajadores reciben un aumento de sueldo").

8. Identificad los átomos, especificad el significado que les atribuís y formalizad los enunciados siguientes:
a) Si tienes que invertir dinero para tener unos buenos ahorros, entonces te será necesario trabajar bastante para obtener dinero.
b) Debéis tener una actitud positiva para aguantar los discursos de los políticos, cuando llegan las elecciones.
c) Necesitas romper el problema en subproblemas más sencillos para hallar una solución correcta, siempre que el problema sea lo bastante grande.
d) Comer pescado cuando se es niño es suficiente para tener buena memoria cuando se es mayor.
e) Comer pescado cuando se es niño es necesario para tener buena memoria cuando se es mayor.
f) Los pájaros emigran a lugares más cálidos cuando tienen frío, sólo cuando no viven enjaulados.

9. Demostrad la validez de los siguientes razonamientos, utilizando la deducción natural (utilizad sólo las nueve reglas básicas):
a) $P \wedge Q, T \wedge R \therefore R \wedge P$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de las reglas **E**$\wedge$ e **I**$\wedge$.)
b) $P \wedge Q, T \wedge R \therefore R \vee P$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de las reglas **E**$\wedge$ e **I**$\vee$.)
c) $P \wedge Q, T \wedge R \therefore S \vee (R \wedge P)$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de las reglas **E**$\wedge$, **I**$\wedge$ e **I**$\vee$.)
d) $P \to Q, P \therefore P \wedge Q$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de las reglas **E**$\to$ e **I**$\wedge$.)
e) $P \to Q, P \therefore Q \vee R$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de las reglas **E**$\to$ e **I**$\vee$.)
f) $P \wedge Q \therefore R \to Q$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de la regla **I**$\to$, entre otras.)
g) $P \wedge Q \therefore Q \to (P \vee S)$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de la regla **I**$\to$, entre otras.)
h) $P \to Q, Q \to R \therefore P \to Q \wedge R$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de las reglas **I**$\to$ y **E**$\to$, entre otras.)
i) $P \vee Q, P \to S, Q \to S \therefore S$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de la regla **E**$\vee$, entre otras.)
j) $P \vee Q, Q \to T \therefore T \vee P$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de las reglas **E**$\vee$ e **I**$\vee$, entre otras.)
k) $P \to Q, P \to \neg Q \therefore \neg P$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de la regla **I**$\neg$, entre otras.)
l) $\neg P \to Q, Q \to P \therefore P$
(Este ejercicio os permitirá practicar la aplicación de las reglas **I**$\neg$ y **E**$\neg$, entre otras.)

10. Demostrad, utilizando sólo las nueve reglas básicas de la deducción natural, la validez de los razonamientos siguientes:
a) $P \to (Q \to R) \therefore Q \to (P \to R)$
(Plantead la demostración como una introducción de la implicación –que puede requerir otra.)
b) $P \wedge (Q \to R) \therefore P \wedge Q \to R$
(Atención con la parentización.)
c) $P \vee (Q \wedge P) \therefore (P \vee Q) \wedge P$
(Plantead la demostración como una prueba por casos.)
d) $P \to (Q \to \neg P) \therefore (P \to Q) \to \neg P$
(Plantead la demostración como una introducción de la implicación.)
e) $P \vee Q \therefore (P \to Q) \to Q$
f) $P \to (Q \to \neg P) \therefore P \to \neg Q$
g) $\neg(P \to Q) \therefore P \wedge \neg Q$
(Plantead la demostración como un par de reducciones al absurdo –una para cada conjuntando.)
h) $(P \vee Q) \wedge R \therefore (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

11. Demostrad la validez de los siguientes razonamientos usando única y exclusivamente las nueve reglas de la deducción natural:

a) $A \to (B \to \neg(A \vee B)) \therefore \neg(A \wedge B)$

b) $A \vee B \therefore \neg A \to B$

c) $A \wedge B \to C, B \to (\neg C \to A) \therefore B \to C$

d) $A \to [\, B \to (\, C \to D \wedge E \wedge \mathrm{F}\,)\,] \therefore C \wedge B \to [\, \neg(\, D \wedge E \wedge \mathrm{F}\,) \to \neg A\,]$

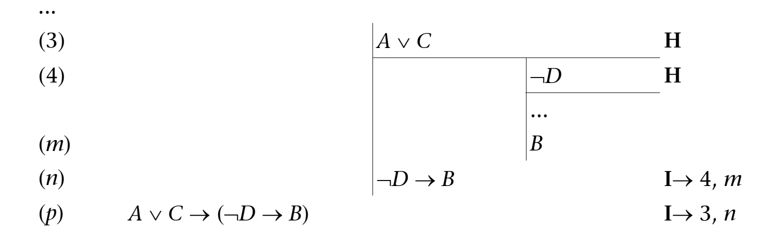
e) $A \to B, \neg D \to \neg C, D \wedge B \to E \therefore C \to (A \to E)$

f) $A \vee B, B \to C \vee D, A \to D, D \to E, C \to A \therefore E$

g) $A \vee B, B \vee C \to D, \neg C \to \neg A \therefore D$

h) $A \to \neg B, C \vee D \to E, E \to B \therefore A \to \neg C \wedge \neg D$

i) $A \to B, C \to D \therefore A \vee C \to (\neg D \to B)$. Para validar este razonamiento, seguid el planteamiento estratégico que se muestra a continuación esquemáticamente:



...				
(3)		$A \vee C$		**H**
(4)			$\neg D$	**H**
			...	
(m)			B	
(n)		$\neg D \to B$		**I**$\to$ 4, m
(p)	$A \vee C \to (\neg D \to B)$			**I**$\to$ 3, n

Para obtener B en la subdeducción encabezada por $\neg D$, haced una prueba por casos sobre $A \vee C$, de modo que en cada rama obtengáis el enunciado B. Observad que en la rama que encabezará C os será fácil obtener una contradicción. Utilizadla para obtener $\neg\neg B$ aplicando **I**$\neg$...

j) $A \to B \vee C, B \to \neg D \vee \neg A \therefore D \to (A \to C)$
¡Atención! El planteamiento estratégico inicial de esta deducción es relativamente simple: suponer D y obtener $A \to C$. Para hacer esto habrá que suponer A y obtener C. Sin embargo, a partir de aquí el problema se complica bastante. Podéis intentar obtener $B \vee C$ y plantear una prueba por casos (**E**$\vee$) donde cada rama finalice con el enunciado C. En la rama encabezada por B os será necesaria una nueva prueba por casos y tendréis que usar la regla **I**$\neg$...

12. Todos los razonamientos que se dan a continuación son válidos. Sin embargo, las demostraciones que los acompañan no son correctas. Indicad por qué razones no lo son.

a) $A \to B, B \to C \therefore A \to (B \to C)$

(1)	$A \to B$		**P**
(2)	$B \to C$		**P**
(3)		A	**H**
(4)		B	**E**$\to$ 1, 3
(5)		C	**E**$\to$ 2, 4
(6)		$B \to C$	**I**$\to$ 4, 5
(7)	$A \to (B \to C)$		**I**$\to$ 3, 6

b) $A \vee B, A \to B \therefore B$

(1)	$A \vee B$			**P**
(2)	$A \to B$			**P**
(3)		$\neg B$		**H**
(4)			A	**H**
(5)			B	**E**$\to$ 2, 4
(6)			$\neg B$	**it** 3
(7)		$\neg A$		**I**$\neg$ 4, 5, 6
(8)		B		**it** 5
(9)		$\neg B$		**it** 3
(10)	$\neg\neg B$			**I**$\neg$ 3, 8, 9
(11)	B			**E**$\neg$ 10

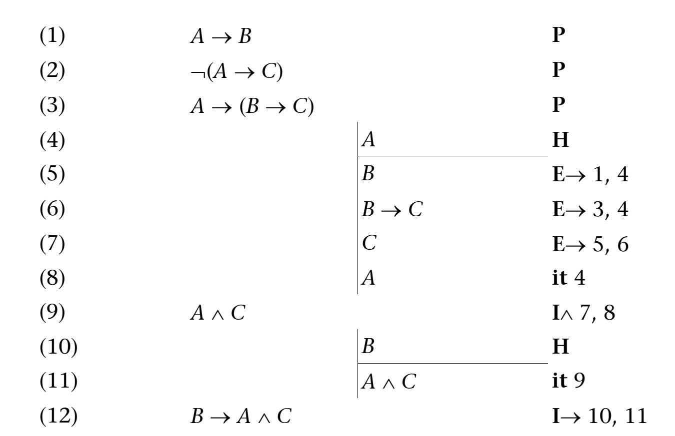
c) $\neg(A \wedge B) \therefore \neg A \vee \neg B$

(1)	$\neg(A \wedge B)$		**P**
(2)		A	**H**
(3)		$A \wedge B$	**I**$\wedge$ 2
(4)		$\neg(A \wedge B)$	**it** 1
(5)	$\neg A$		**I**$\neg$ 2, 3, 4
(6)	$\neg A \vee \neg B$		**I**$\vee$ 5

d) $\neg(A \wedge B) \therefore \neg A \vee \neg B$

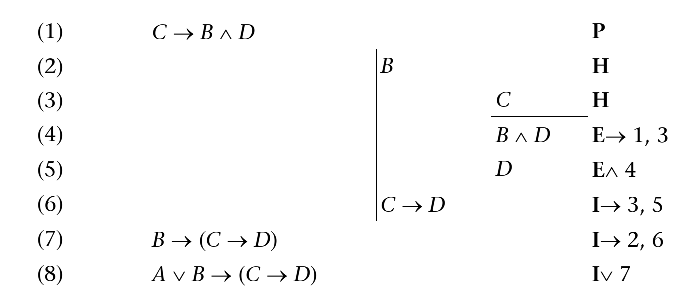
(1)	$\neg(A \wedge B)$	**P**
(2)	$\neg A$	**E**$\wedge$ 1
(3)	$\neg A \vee \neg B$	**I**$\vee$ 2

e) $A \to B, \neg(A \to C), A \to (B \to C) \therefore B \to A \wedge C$



(1)	$A \to B$		**P**
(2)	$\neg(A \to C)$		**P**
(3)	$A \to (B \to C)$		**P**
(4)		A	**H**
(5)		B	**E**$\to$ 1, 4
(6)		$B \to C$	**E**$\to$ 3, 4
(7)		C	**E**$\to$ 5, 6
(8)		A	**it** 4
(9)	$A \wedge C$		**I**$\wedge$ 7, 8
(10)		B	**H**
(11)		$A \wedge C$	**it** 9
(12)	$B \to A \wedge C$		**I**$\to$ 10, 11

f) $C \to B \wedge D \therefore A \vee B \to (C \to D)$



(1)	$C \to B \wedge D$			**P**
(2)		B		**H**
(3)			C	**H**
(4)			$B \wedge D$	**E**$\to$ 1, 3
(5)			D	**E**$\wedge$ 4
(6)		$C \to D$		**I**$\to$ 3, 5
(7)	$B \to (C \to D)$			**I**$\to$ 2, 6
(8)	$A \vee B \to (C \to D)$			**I**$\vee$ 7

g) $A \vee B, A \to C, B \to \neg(C \to A) \therefore C$

(1)	$A \vee B$		**P**
(2)	$A \to C$		**P**
(3)	$B \to \neg(C \to A)$		**P**
(4)		A	**H**
(5)		C	**E**$\to$ 2, 4
(6)		B	**H**
(7)		C	**it** 5
(8)	C		**E**$\vee$ 1, 5, 7

13. Cada pareja de frases se corresponde con enunciados que son deductivamente equivalentes. Formalizadlas y demostrad su equivalencia utilizando la deducción natural.

a) F_1: “Si llueve, te mojas si no llevas paraguas.”
F_2: “Si no llevas paraguas, sólo si no llueve no te mojas.”

b) F_1: "Si escuchas música no hablas y bailas simultáneamente."
F_2: "Cuando bailas no escuchas música, si hablas."
c) F_1: "No pasa simultáneamente que si llueve te mojas y que si hace sol te bronceas."
F_2: "Si te mojas cuando llueve, entonces hace sol y no te bronceas."
d) F_1: "Sólo cuando hace sol no es necesario encender la luz para leer."
F_2: "O hace sol o para leer hay que encender la luz."
e) F_1: "Si sube la bolsa y baja la inflación entonces las empresas ganan dinero y los trabajadores tienen incrementos salariales."
F_2: "Cuando es necesario que los trabajadores no tengan incrementos salariales para que las empresas ganen dinero, la inflación no baja si la bolsa sube."

14. Todos los razonamientos que se dan a continuación son válidos si las implicaciones se formalizan correctamente. Formalizadlos y validadlos utilizando la deducción natural. Utilizad reglas derivadas, equivalentes deductivos o introducción de teoremas, si lo consideráis necesario:
a) "Cuando llueve y hace sol, sale el arco iris. El arco iris sólo sale si no hay polución. Hace sol y hay polución. Por lo tanto, no llueve."
b) "Juan llega tarde y María se enfada. Pedro está contento sólo cuando María no se enfada. Si Pedro no está contento, su hijo llora. Como consecuencia de todo esto puede decirse que o bien el hijo de Pedro llora o bien Juan no llega tarde o, quizá, ambas cosas."
c) "No hay pasteles o no hay pan. Es necesario que haya pan para poder hacer bocadillos. Sólo si no hay azúcar no hay pasteles. Azúcar sí hay. De modo que no es el caso de que haya bocadillos."
d) "Es necesario que el maquinista se duerma para que el tren llegue tarde. Si el maquinista se duerme, el supervisor se enfada y los pasajeros gritan. Sólo hay reclamaciones cuando el tren llega tarde. Hay reclamaciones. Luego, los pasajeros gritan."
e) "Cuando sube la bolsa, suben los beneficios empresariales y bajan los bonos del tesoro. Sólo hay inflación baja si bajan los bonos del tesoro. Si suben los beneficios empresariales y bajan los bonos del tesoro, hay inversión extranjera. Los beneficios empresariales suben si hay inflación baja. Por lo tanto, debe haber inversión extranjera para que suba la bolsa o haya baja inflación."
f) "Cuando la temperatura en la alta atmósfera es baja y no pasa que haya riesgo de huracanes cuando hay riesgo de tempestades, entonces la presión es alta. Solamente hay riesgo de huracanes y de tempestades cuando la atmósfera está cargada de electricidad. Es necesario que la atmósfera no esté cargada de electricidad para que se forme granizo, siempre que la temperatura en la alta atmósfera sea baja. Se forma granizo si hay formaciones montañosas. De todo esto se desprende que cuando la temperatura en la alta atmósfera es baja y hay riesgo de tempestades, entonces la presión es alta si hay formaciones montañosas."

15) Verificad que las siguientes parejas de enunciados son deductivamente equivalentes construyendo sus tablas de verdad y constatando que son idénticas.
a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ y $(P \wedge \neg Q) \vee R$
b) $P \rightarrow Q \rightarrow R$ y $(\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$
c) $P \wedge (P \rightarrow Q)$ y $\neg(Q \rightarrow \neg P)$

16. Verificad que los enunciados $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$ y $A \vee C \rightarrow B \vee D$ no son deductivamente equivalentes construyendo sus tablas de verdad y constatando que no son idénticas. Observad las tablas resultantes y decid qué relación hay entre estos dos enunciados.

17. El razonamiento $\neg(A \rightarrow C), \neg A \vee B, B \rightarrow C \therefore C$ es válido. Podéis demostrarlo construyendo la tabla de verdad de las premisas y de la conclusión y constatando que no hay ningún contraejemplo. ¿Sería válido este razonamiento si la conclusión fuese cualquier otro enunciado?

18. Los razonamientos siguientes son incorrectos. Formalizadlos y dad un contraejemplo para cada uno:
a) Cuando viajas en avión esperas en el aeropuerto. Sólo cuando esperas en el aeropuerto te pones de mal humor. Así pues, cuando viajas en avión te pones de mal humor.
b) O tienes ganas de venir o te quedas en casa viendo la tele. Cuando tienes ganas de venir, llamas para decírnoslo. Cuando estás enfermo, te quedas en casa viendo la tele. Todo esto quiere decir que si no llamas a casa para decirnos que tienes ganas de venir es que estás enfermo.
c) Siempre que tienes hambre, tienes sed si estás cansado. No es necesario que tengas hambre para tener sed. De este modo, no pasa que cuando estás cansado no tienes sed.

19. Demostrad utilizando tablas de verdad que los siguientes conjuntos de enunciados son inconsistentes:
a) $\{ A \rightarrow B, B \rightarrow C, A, \neg A \vee \neg C \}$
b) $\{ A \vee B, \neg(A \wedge B), B \rightarrow A, A \rightarrow (C \rightarrow B), C \}$

20. Volved a demostrar la inconsistencia de los dos conjuntos anteriores utilizando la deducción natural. Se trata de demostrar que a partir de éstos puede llegarse a una

contradicción (por ejemplo, para el primero de los conjuntos se trata de demostrar que $A \to B$, $B \to C$, A, $\neg A \vee \neg C \vdash \square$. No importa de qué contradicción se trate, dado que todas son deductivamente equivalentes).

21. Demostrad, utilizando el método de resolución, que los siguientes razonamientos son correctos:

a) $P \wedge Q \to R,\ Q \to (\neg R \to P)\ \therefore\ Q \to R$
b) $P \to Q,\ \neg T \to \neg R,\ T \wedge Q \to W\ \therefore\ R \to (P \to W)$
c) $P \vee Q,\ Q \vee R \to T,\ \neg R \to \neg P\ \therefore\ T$
d) $P \to \neg Q,\ R \vee T \to W,\ W \to Q\ \therefore\ P \to \neg R \wedge \neg T$
e) $P \to Q,\ R \to T\ \therefore\ P \vee R \to (\neg T \to Q)$

22. Formalizad los siguientes razonamientos y después utilizad el método de resolución para descubrir si son o no correctos. Utilizad la estrategia del conjunto de apoyo, la regla del literal puro y la regla de subsunción.

a) "Fracasarás si tienes mala memoria o poca voluntad. De todos modos, si fracasas es que tienes mala memoria. Pues bien, si no tienes mala memoria, no tienes poca voluntad."
b) "Vienen si (y sólo en este caso) no han tenido tiempo de prepararse nada para comer. Cuando vienen no podemos ir al cine. Sin embargo, podemos ir al cine. Tenemos que concluir que han tenido tiempo de prepararse algo para comer."
c) "O compras naranjas o compras manzanas (pero no ambas cosas). Si compras manzanas haré un pastel y si no las compras, haré mermelada. Luego haré un pastel o haré mermelada, pero no ambas cosas."
d) "Si el presentador fuese competente habría mantenido la audiencia, y si lo hubiese hecho, la empresa lo habría promocionado. Sin embargo, la empresa no lo ha promocionado. Así pues, el presentador no es competente."
e) "Es necesario que seas paciente para tener éxito en los negocios, si quieres llegar arriba del todo. Para ser paciente hay que haber recibido una educación equilibrada. Tú no eres nada paciente pero quieres llegar arriba de todo y tienes éxito en los negocios. Entonces es que no has recibido una educación equilibrada."
f) "Cuando las condiciones climáticas son las adecuadas salen setas. Si salen setas los bosques se llenan de buscadores de setas. Los bosques están llenos de buscadores de setas. En consecuencia, las condiciones climáticas son las adecuadas."
g) "Si los productos no se abaratan, las exportaciones se pararán si no se promulgan leyes específicas. Ni los productos se abaratan ni se promulgan leyes específicas. Por lo tanto, las exportaciones se paran."
h) "Siempre que sales tarde de casa debes correr para tomar el autobús. Tomas el autobús si el metro no funciona. Podemos concluir, pues, que cuando el metro no funciona, si no corres es que no sales tarde de casa."

23. Decid si cada uno de los siguientes conjuntos de cláusulas se corresponde o no con un razonamiento correcto. Si el razonamiento es correcto, decid si las premisas son o no consistentes. Las cláusulas del conjunto de apoyo se destacan en negrita.

a) $\{\neg A \vee B \vee C,\ \neg D \vee \neg A \vee \neg B,\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\neg C},\ \boldsymbol{A}\}$
b) $\{\neg A \vee B,\ A,\ \neg C,\ \neg A \vee \neg B \vee C,\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{\neg A \vee \neg C}\}$
c) $\{N \vee \neg E,\ E \vee \neg S,\ \neg T \vee C \vee S,\ \neg T \vee \neg C \vee E,\ \boldsymbol{\neg N},\ \boldsymbol{T}\}$
d) $\{P \vee Q \vee R,\ \neg S \vee \neg P \vee \neg Q,\ S,\ \neg R,\ \boldsymbol{P}\}$
e) $\{G \vee \neg H,\ F \vee H,\ H \vee \neg F,\ H \vee \neg G \vee \neg F,\ \boldsymbol{\neg H}\}$
f) $\{P \vee Q,\ \neg P \vee \neg R,\ \neg Q \vee \neg R,\ T \vee \neg R,\ \boldsymbol{T}\}$

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1.

a) **Incorrecto**. Observad que BC no es un átomo porque si lo fuese, lo representaríamos con una sola letra mayúscula. Y tampoco se trata de un enunciado no atómico porque no contiene ninguna conectiva.

b) **Correcto**. A partir de A se ha construido $(\neg A)$, a partir de A y de B se ha construido $(A \wedge B)$ y a partir de C y de D se ha construido $(C \rightarrow D)$. A partir de $(\neg A)$ y de $(C \rightarrow D)$ se ha construido $((\neg A) \vee (C \rightarrow D))$. Y, finalmente, a partir de $(A \wedge B)$ y de $((\neg A) \vee (C \rightarrow D))$ se ha construido:

$$((A \wedge B) \rightarrow ((\neg A) \vee (C \rightarrow D))).$$

c) **Incorrecto**. Observad que entre $(A \rightarrow B)$ y $(\neg C)$ debería haber alguna conectiva.

d) **Incorrecto**. Observad que después de $A \rightarrow$ debería haber algún enunciado, pero lo que hay es otra conectiva.

e) **Correcto**. Se trata del enunciado $((A \rightarrow ((\neg B) \wedge C)) \rightarrow (D \vee A))$. Los paréntesis más externos siempre pueden eliminarse y entonces queda $(A \rightarrow ((\neg B) \wedge C)) \rightarrow (D \vee A)$. Dado que la prioridad de $\vee$ es superior a la de $\rightarrow$, los paréntesis que rodean $D \vee A$ pueden eliminarse y lo mismo ocurre con los que rodean $(\neg B) \wedge C$ porque la prioridad de $\wedge$ también es superior a la de $\rightarrow$. Así, el enunciado también podía haberse escrito $(A \rightarrow (\neg B) \wedge C) \rightarrow D \vee A$. Teniendo en cuenta que la prioridad de $\neg$ es la mayor de todas, se puede prescindir de los paréntesis que rodean $\neg B$ y tendríamos $(A \rightarrow \neg B \wedge C) \rightarrow D \vee A$. Finalmente, los paréntesis que rodean $A \rightarrow \neg B \wedge C$ también pueden eliminarse porque a igualdad de prioridad la asociatividad ya es de izquierda a derecha.

2.

a) Tened presente que los paréntesis más exteriores pueden eliminarse siempre. Con esto obtendremos $(\neg(A \wedge (\neg B))) \wedge (\neg(C \vee D))$. Tened también presente que los paréntesis que rodean la negación de cualquier enunciado no son necesarios porque la prioridad de $\neg$ es la mayor de todas. Con esto obtendremos:

$$\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(C \vee D).$$

b) Eliminando los paréntesis más externos y aquellos que rodean negaciones se obtiene $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg C \vee D)$. Teniendo en cuenta que la prioridad de $\rightarrow$ es inferior a la de $\wedge$ y a la de $\vee$, se obtiene:

$$\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg C \vee D.$$

c) Eliminando los paréntesis más externos y los que rodean negaciones de enunciados se obtiene $(((A \wedge B) \vee \neg C) \rightarrow D) \rightarrow \neg C$. Teniendo en cuenta que la asociatividad de dos conectivas idénticas es de izquierda a derecha, obtenemos $((A \wedge B) \vee \neg C) \rightarrow D \rightarrow \neg C$. El hecho de que $\wedge$ y $\vee$ tengan la misma prioridad hace que su asociatividad sea de izquierda a derecha, con lo cual tenemos $(A \wedge B \vee \neg C) \rightarrow D \rightarrow \neg C$. Finalmente, dado que la prioridad de $\vee$ es superior a la de $\rightarrow$ nos queda:

$$A \wedge B \vee \neg C \rightarrow D \rightarrow \neg C.$$

d) Sólo es posible eliminar los paréntesis más exteriores y todos aquellos que rodean negaciones. El resultado final es:

$$\neg\neg A \vee (\neg(B \wedge C) \wedge D).$$

e) Eliminando los paréntesis más externos y teniendo en cuenta que a igualdad de conectiva la asociatividad es de izquierda a derecha queda:

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow D.$$

3.

a) $(((\neg A) \wedge B) \rightarrow (C \vee D))$. Si prescindimos de los paréntesis más externos y de los que rodean negaciones se obtiene:

$$(\neg A \wedge B) \rightarrow (C \vee D).$$

b) $((A \wedge B) \rightarrow (C \vee (\neg D)))$. Si prescindimos de los paréntesis más externos y de los que rodean negaciones se obtiene:

$$(A \wedge B) \rightarrow (C \vee \neg D).$$

c) $(A \to ((B \vee C) \wedge (\neg D)))$. Si prescindimos de los paréntesis más externos y de los que rodean negaciones se obtiene:

$$A \to ((B \vee C) \wedge \neg D).$$

d) $((A \to (B \wedge (\neg C))) \to D)$. Si prescindimos de los paréntesis más externos y de los que rodean negaciones se obtiene:

$$(A \to (B \wedge \neg C)) \to D.$$

e) $(((A \to B) \to C) \to D)$. Si prescindimos de los paréntesis más externos se obtiene:

$$((A \to B) \to C) \to D.$$

4.

a) M: "(Yo) como demasiado"; C: "(Yo) me tomo un café"; D: "(Yo) puedo dormir"

$$M \vee C \to \neg D$$

b) V: "La vajilla china de porcelana se lava con agua demasiado caliente"; P: "Se rompen un par de platos"

$$V \to P$$

c) D: "(Tú) haces los deberes"; C: "(Ellos, quienes sean) te castigan";

$$(D \to \neg C) \wedge (\neg D \to C)$$

d) P: "(Yo) voy a la playa"; D: "(Yo) leo el periódico"; B: "(Yo) me baño"

$$P \to (D \vee B) \wedge \neg(D \wedge B)$$

5. Pueden utilizase los mismos átomos para todas las formalizaciones:
P: "Llueve"; S: "Hace sol"; A: "Sale el arco iris"; C: "Estoy contento"

a) $P \wedge S \to A \wedge C$
b) $(P \to S) \to A \wedge C$
c) $P \wedge A \to (S \to C)$
d) $P \wedge S \wedge A \wedge C$
e) $\neg P \to \neg A \wedge (\neg S \to \neg C)$
f) $(\neg P \to \neg A) \wedge (\neg S \to \neg C)$
g) $S \to (P \to A)$
h) $(P \to S) \to (A \to C)$

6.

a) $S \to \neg E \wedge \neg \mathrm{I}$
b) $(P \to C) \wedge (A \to \neg T)$
c) $C \to (B \to A)$
d) $C \to (\neg B \to \neg A)$ o, también, $C \to (A \to B)$
e) Observad que, globalmente, la frase expresa una condición suficiente. El antecedente de la condición (lo que es suficiente) es "Hay que llevar la calculadora para aprobar", y el consecuente (aquello para lo cual el antecedente es suficiente) es "Es necesario recordar las fórmulas para poder estar tranquilo". Tanto el antecedente como el consecuente expresan condiciones necesarias.

$$(\neg C \to \neg A) \to (\neg F \to \neg T), \text{ o también: } (A \to C) \to (T \to F)$$

f) Igual que en el caso anterior, la frase expresa una condición suficiente. "Llueve o nieva" es suficiente para "Es necesario llevar la gabardina para no mojarse".

$$P \vee N \to (\neg M \to G), \text{ o también: } P \vee N \to (\neg G \to M)$$

g) $(S \to (M \to T)) \wedge (A \to R \vee P)$
h) $\neg E \to (\mathrm{I} \to B)$

7.

a) $M \to P$, o también: $\neg P \to \neg M$
b) $T \to V$, o también: $\neg V \to \neg T$
c) $P \to (V \to M)$, o también: $P \to (\neg M \to \neg V)$. Observad que la frase dada expresa una condición suficiente donde "Las plazas del avión están cubiertas" es suficiente para "Has de ser ministro para poder volar". El consecuente de la implicación sí que es una frase que expresa una condición necesaria.
d) $B \leftrightarrow D$, o también, teniendo en cuenta la definición de la conectiva $\leftrightarrow$:

$$(B \to D) \wedge (D \to B)$$

e) $D \to (\mathrm{O} \to E)$, o también: $D \to (\neg E \to \neg \mathrm{O})$. Observad que, en su globalidad, la frase dada expresa una condición suficiente aunque lo que es suficiente ("La asignatura que cursas es difícil") aparece al final de la frase.
f) $T \to A$, o también: $\neg A \to \neg T$

8.

a) I: “Inviertes dinero”; E: “Tienes buenos ahorros”; T: “Trabajas bastante”; D: “Obtienes dinero”:

$$(E \to I) \to (D \to T)\text{, o también: } (\neg I \to \neg E) \to (\neg T \to \neg D)$$

b) P: “Tenéis una actitud positiva”; D: “Aguantáis los discursos de los políticos”; E: “Llegan las elecciones”:

$$E \to (D \to P)\text{, o también: } E \to (\neg P \to \neg D)$$

c) G: “El problema es lo bastante grande”; T: “Rompes el problema en subproblemas más sencillos”; S: “Hallas una solución correcta”:

$$G \to (S \to T)\text{, o también: } G \to (\neg T \to \neg S)$$

d) P: “Se come pescado”; I: “Se es niño”; M: “Se tiene buena memoria”; G: “Se es mayor”:

$$(I \to P) \to (G \to M)$$

e) Utilizando los mismos átomos que en el punto anterior:

$$(G \to M) \to (I \to P)\text{, o también: } \neg(I \to P) \to \neg(G \to M)$$

f) E: “Los pájaros emigran a lugares más cálidos”; F: “Los pájaros tienen frío”; J: “Los pájaros viven enjaulados”:

$$(F \to E) \to \neg J\text{, o también: } J \to \neg(F \to E)$$

9.

a)

(1)	$P \wedge Q$	**P**
(2)	$T \wedge R$	**P**
(3)	R	**E**$\wedge$ 2
(4)	P	**E**$\wedge$ 1
(5)	$R \wedge P$	**I**$\wedge$ 3, 4

En este caso, el orden no tiene importancia. También se podría haber hecho:

(1)	$P \wedge Q$	**P**
(2)	$T \wedge R$	**P**
(3)	P	**E**$\wedge$ 1
(4)	R	**E**$\wedge$ 2
(5)	$R \wedge P$	**I**$\wedge$ 3, 4

b)

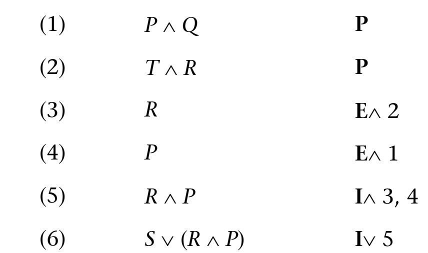
(1)	$P \wedge Q$	**P**
(2)	$T \wedge R$	**P**
(3)	R	**E**$\wedge$ 2
(4)	$R \vee P$	**I**$\vee$ 3

También se podría haber hecho:

(1)	$P \wedge Q$	**P**
(2)	$T \wedge R$	**P**
(3)	P	**E**$\wedge$ 1
(4)	$R \vee P$	**I**$\vee$ 3

Observad que para introducir la disyunción, no hay que tener todos los disyuntandos. Basta con tener uno (cualquiera).

c)



(1)	$P \wedge Q$	**P**
(2)	$T \wedge R$	**P**
(3)	R	**E**$\wedge$ 2
(4)	P	**E**$\wedge$ 1
(5)	$R \wedge P$	**I**$\wedge$ 3, 4
(6)	$S \vee (R \wedge P)$	**I**$\vee$ 5

d)

(1)	$P \to Q$	**P**
(2)	P	**P**
(3)	Q	**E**$\to$ 1, 2
(4)	$P \wedge Q$	**I**$\wedge$ 2, 3

e)

(1)	$P \to Q$	**P**
(2)	P	**P**
(3)	Q	**E**$\to$ 1, 2
(4)	$Q \vee R$	**I**$\vee$ 3

f)

(1)	$P \wedge Q$		**P**
(2)		R	**H**
(3)		Q	**E**$\wedge$ 1
(4)	$R \to Q$		**I** $\to$ 2, 3

g)

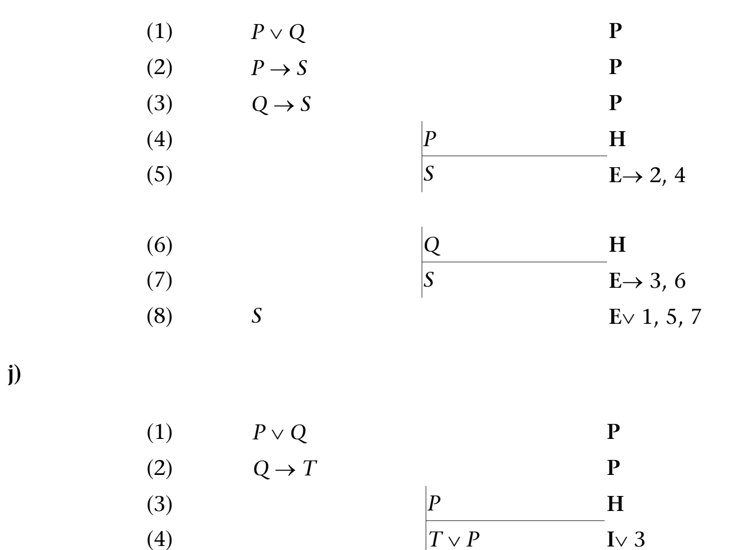
(1)	$P \wedge Q$		**P**
(2)		Q	**H**
(3)		P	**E**$\wedge$1
(4)		$P \vee S$	**I**$\vee$ 3
(5)	$Q \to P \vee S$		**I**$\to$ 2, 4

Observad que los paréntesis de $Q \to (P \vee S)$ no son estrictamente necesarios gracias a la mayor prioridad de la conectiva $\vee$.

h)

(1)	$P \to Q$		**P**
(2)	$Q \to R$		**P**
(3)		P	**H**
(4)		Q	**E**$\to$ 1, 3
(5)		R	**E**$\to$ 2, 4
(6)		$Q \wedge R$	**I**$\wedge$ 4, 5
(7)	$P \to Q \wedge R$		**I**$\to$ 3, 6

i)



(1)	$P \vee Q$		**P**
(2)	$P \to S$		**P**
(3)	$Q \to S$		**P**
(4)		P	**H**
(5)		S	**E**$\to$ 2, 4
(6)		Q	**H**
(7)		S	**E**$\to$ 3, 6
(8)	S		**E**$\vee$ 1, 5, 7

j)

(1)	$P \vee Q$		**P**
(2)	$Q \to T$		**P**
(3)		P	**H**
(4)		$T \vee P$	**I**$\vee$ 3
(5)		Q	**H**
(6)		T	**E**$\to$ 2, 5
(7)		$T \vee P$	**I**$\vee$ 6
(8)	$T \vee P$		**E**$\vee$ 1, 4, 7

k)

(1)	$P \to Q$		**P**
(2)	$P \to \neg Q$		**P**
(3)		P	**H**
(4)		Q	**E**$\to$ 1, 3
(5)		$\neg Q$	**E**$\to$ 2, 3
(6)	$\neg P$		**I**$\neg$ 3, 4, 5

l)

(1)	$\neg P \to Q$		**P**
(2)	$Q \to P$		**P**
(3)		$\neg P$	**H**
(4)		Q	**E**$\to$ 1, 3
(5)		P	**E**$\to$ 2, 4
(6)		$\neg P$	**it** 3
(7)	$\neg\neg P$		**I**$\neg$ 3, 5, 6
(8)	P		**E**$\neg$ 7

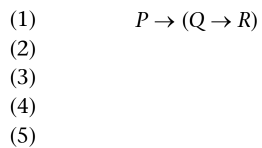
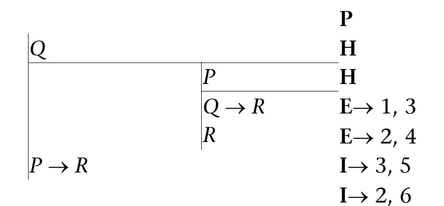
La iteración del punto 6 es, como cualquier iteración, totalmente opcional. Su propósito es mejorar la legibilidad de la demostración.

La demostración que se da a continuación también es correcta:

(1)	$\neg P \to Q$		**P**
(2)	$Q \to P$		**P**
(3)		$\neg P$	**H**
(4)		Q	**E**$\to$ 1, 3
(5)		P	**E**$\to$ 2, 4
(6)	$\neg\neg P$		**I**$\neg$ 3, 3, 5
(7)	P		**E**$\neg$ 6

10.

a)

(1)	$P \to (Q \to R)$			**P**
(2)		Q		**H**
(3)			P	**H**
(4)			$Q \to R$	E→ 1, 3
(5)			R	E→ 2, 4
(6)		$P \to R$		I→ 3, 5
(7)	$Q \to (P \to R)$			I→ 2, 6

b)

(1)	$P \wedge (Q \to R)$		**P**
(2)		$P \wedge Q$	**H**
(3)		Q	E∧ 2
(4)		$Q \to R$	E∧ 1
(5)		R	E→ 3, 4
(6)	$P \wedge Q \to R$		I→ 2, 5

c)

(1)	$P \vee (Q \wedge P)$		**P**
(2)		P	**H**
(3)		$P \vee Q$	I∨ 2
(4)		P	**it** 2
(5)		$(P \vee Q) \wedge P$	I∧ 3, 4
(6)		$Q \wedge P$	**H**
(7)		P	E∧ 6
(8)		$P \vee Q$	I∨ 7
(9)		$(P \vee Q) \wedge P$	I∧ 7, 8
(10)	$(P \vee Q) \wedge P$		E∨ 1, 5, 9

d)

(1)	$P \to (Q \to \neg P)$			**P**
(2)		$P \to Q$		**H**
(3)			P	**H**
(4)			Q	E→ 2, 3
(5)			$Q \to \neg P$	E→ 1, 3
(6)			$\neg P$	E→ 4, 5
(7)			P	**it** 3
(8)		$\neg P$		I¬ 3, 6, 7
(9)	$(P \to Q) \to \neg P$			I→ 2, 8

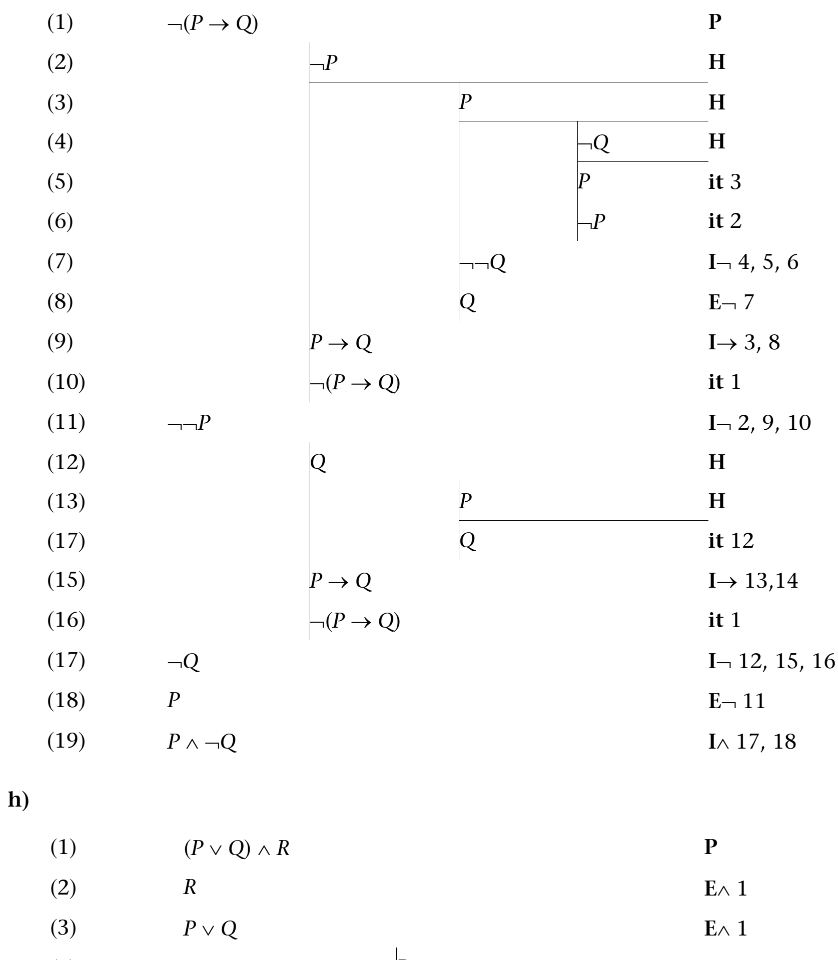
e)

(1)	$P \vee Q$			**P**
(2)		$P \to Q$		**H**
(3)			P	**H**
(4)			Q	E→ 2, 3
(5)			Q	**H**
(6)			Q	**it** 5
(7)		Q		E∨ 1, 4, 6
(8)	$(P \to Q) \to Q$			I→ 2, 7

f)

(1)	$P \to (Q \to \neg P)$			**P**
(2)		P		**H**
(3)			Q	**H**
(4)			$Q \to \neg P$	E→ 1, 2
(5)			$\neg P$	E→ 3, 4
(6)			P	**it** 2
(7)		$\neg Q$		I¬ 3, 5, 6
(8)	$P \to \neg Q$			I→ 2, 7

g)



(1)	$\neg(P \to Q)$				**P**
(2)		$\neg P$			**H**
(3)			P		**H**
(4)				$\neg Q$	**H**
(5)				P	**it** 3
(6)				$\neg P$	**it** 2
(7)			$\neg\neg Q$		**I**$\neg$ 4, 5, 6
(8)			Q		**E**$\neg$ 7
(9)		$P \to Q$			**I**$\to$ 3, 8
(10)		$\neg(P \to Q)$			**it** 1
(11)	$\neg\neg P$				**I**$\neg$ 2, 9, 10
(12)		Q			**H**
(13)			P		**H**
(17)			Q		**it** 12
(15)		$P \to Q$			**I**$\to$ 13,14
(16)		$\neg(P \to Q)$			**it** 1
(17)	$\neg Q$				**I**$\neg$ 12, 15, 16
(18)	P				**E**$\neg$ 11
(19)	$P \wedge \neg Q$				**I**$\wedge$ 17, 18

h)

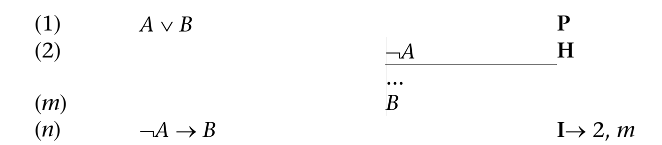
(1)	$(P \vee Q) \wedge R$		**P**
(2)	R		**E**$\wedge$ 1
(3)	$P \vee Q$		**E**$\wedge$ 1
(4)		P	**H**
(5)		$P \wedge R$	**I**$\wedge$ 2, 4
(6)		$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	**I**$\vee$ 5
(7)		Q	
(8)		$Q \wedge R$	**I**$\wedge$ 2, 7
(9)		$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	**I**$\vee$ 8
(10)	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$		**E**$\vee$ 3, 6, 9

11.

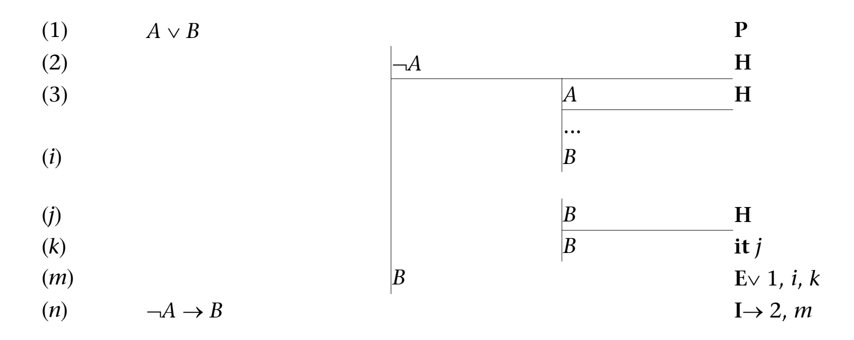
a) Planteamiento estratégico de la deducción: el enunciado $\neg(A \wedge B)$ no forma parte de la premisa y, además, ésta es una implicación para la que no disponemos ni del antecedente ni de la negación del consecuente. Parece razonable plantear la deducción como una reducción al absurdo: empezar suponiendo $A \wedge B$ –la negación de $\neg(A \wedge B)$– para poder finalizar con la introducción de $\neg$. Observad que empezar suponiendo $A \wedge B$ nos permitirá al menos disponer de A, el antecedente de la premisa.

(1)	$A \to (B \to \neg(A \vee B))$		**P**
(2)		$A \wedge B$	**H**
(3)		A	**E**$\wedge$ 2
(4)		$B \to \neg(A \vee B)$	**E**$\to$ 1, 3
(5)		B	**E**$\wedge$ 2
(6)		$\neg(A \vee B)$	**E**$\to$ 4, 5
(7)		$A \vee B$	**I**$\vee$ 3
(8)	$\neg(A \wedge B)$		**I**$\neg$ 2, 6, 7

b) Planteamiento estratégico de la deducción: la forma de la conclusión (una implicación) sugiere plantear la deducción como una introducción de la implicación (suponer el antecedente, llegar al consecuente e introducir la conectiva). Es decir:

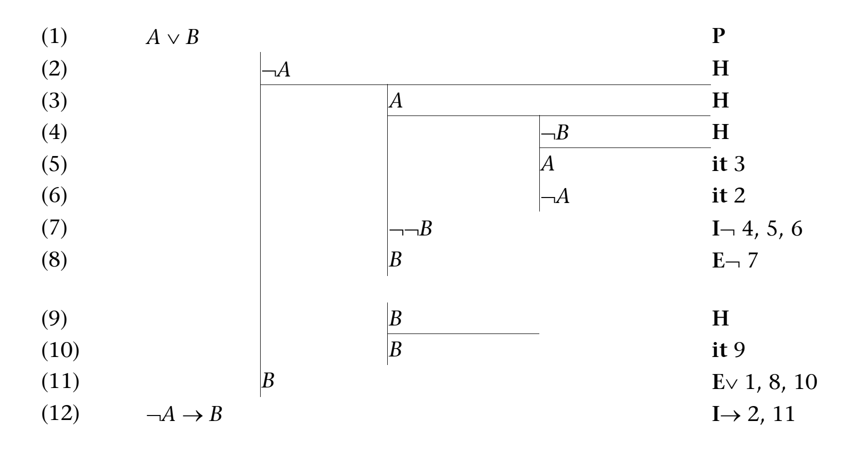


No es inmediato darse cuenta de cómo continuar a partir de este punto. Disponemos de la premisa $A \vee B$ y del supuesto $\neg A$ para hallar B. Una posibilidad es plantear una prueba por casos (**E**$\vee$) a partir de la premisa, en la que ambos casos finalicen con el enunciado B. Al menos uno de los dos casos será trivial:



En este punto, hemos reducido el problema a llegar a B en la subdeducción encabezada por A. Observad que, en el ámbito de esta subdeducción, los enunciados A y $\neg A$ están disponibles. Los podemos utilizar para forzar una introducción de la negación que nos permita obtener B. Supondremos $\neg B$ para poder obtener $\neg\neg B$ por **I**$\neg$ y así poder pasar a B por aplicación de la regla **E**$\neg$.

Finalmente la deducción quedará:



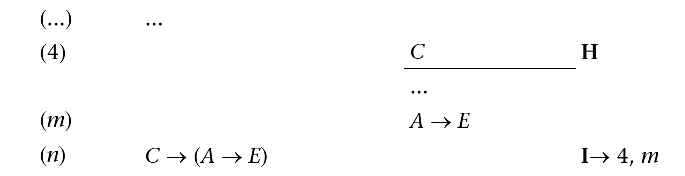
c)

(1)	$A \wedge B \to C$			**P**
(2)	$B \to (\neg C \to A)$			**P**
(3)		B		**H**
(4)			$\neg C$	**H**
(5)			$\neg C \to A$	**E**$\to$ 2, 3
(6)			A	**E**$\to$ 4, 5
(7)			$A \wedge B$	**I**$\wedge$ 3, 6
(8)			C	**E**$\to$ 1, 7
(9)		$\neg\neg C$		**I**$\neg$ 4, 4, 8
(10)		C		**E**$\neg$ 9
(11)	$B \to C$			**I**$\to$ 3, 10

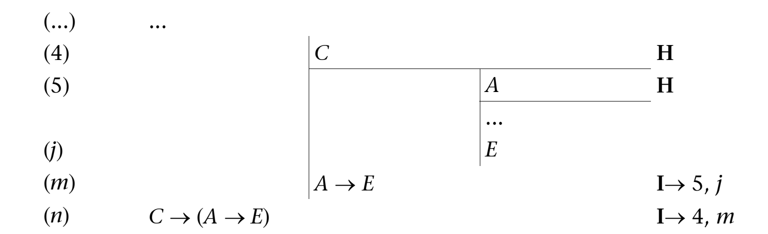
d)

(1)	$A \rightarrow [B \rightarrow (C \rightarrow D \wedge E \wedge F)]$	**P**
(2)	$C \wedge B$	**H**
(3)	$\neg(D \wedge E \wedge F)$	**H**
(4)	A	**H**
(5)	$B \rightarrow (C \rightarrow D \wedge E \wedge F)$	**E**$\rightarrow$ 1, 4
(6)	B	**E**$\wedge$ 2
(7)	$C \rightarrow D \wedge E \wedge F$	**E**$\rightarrow$ 5, 6
(8)	C	**E**$\wedge$ 2
(9)	$D \wedge E \wedge F$	**E**$\rightarrow$ 7, 8
(10)	$\neg(D \wedge E \wedge F)$	**it** 3
(11)	$\neg A$	**I**$\neg$ 4, 9, 10
(12)	$\neg(D \wedge E \wedge F) \rightarrow \neg A$	**I**$\rightarrow$ 3, 11
(13)	$C \wedge B \rightarrow [\neg(D \wedge E \wedge F) \rightarrow \neg A]$	**I**$\rightarrow$ 2, 12

e) Planteamiento estratégico de la deducción: la forma de la conclusión sugiere plantear la deducción como una introducción de la implicación:



Y para obtener $A \rightarrow E$, parece procedente volver a hacer un planteamiento de introducción de la implicación:



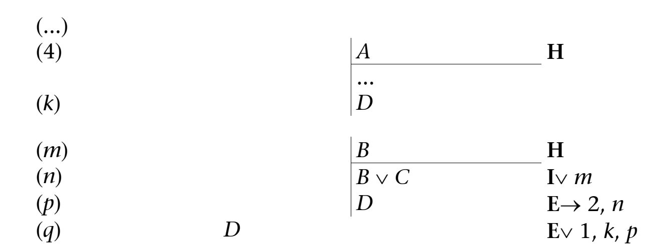
Para llegar a E al final de la subdeducción más interna, podemos darnos cuenta de que este enunciado se podría obtener de $D \wedge B \rightarrow E$ por aplicación de la regla **E**$\rightarrow$. Para poder hacer esto, habría que disponer de $D \wedge B$ o de D y de B por separado, que nos permitirían obtener $D \wedge B$ aplicando **I**$\wedge$. Obtener B será fácil dado que disponemos de $A \rightarrow B$ y de A. D puede obtenerse por introducción de la negación. Observad que de $\neg D$ y de $\neg D \rightarrow \neg C$ obtendremos $\neg C$ y que ya disponemos de C. Finalmente, la deducción quedará:

(1)	$A \rightarrow B$	**P**
(2)	$\neg D \rightarrow \neg C$	**P**
(3)	$D \wedge B \rightarrow E$	**P**
(4)	C	**H**
(5)	A	**H**
(6)	$\neg D$	**H**
(7)	$\neg C$	**E**$\rightarrow$ 2, 6
(8)	C	**it** 4
(9)	$\neg\neg D$	**I**$\neg$ 6, 7, 8
(10)	D	**E**$\neg$ 9
(11)	B	**E** $\rightarrow$ 1, 5
(12)	$D \wedge B$	**I**$\wedge$ 10, 11
(13)	E	**E**$\rightarrow$ 3, 12
(14)	$A \rightarrow E$	**I**$\rightarrow$ 5, 13
(15)	$C \rightarrow (A \rightarrow E)$	**I**$\rightarrow$ 4, 14

f) Planteamiento estratégico de la deducción: observamos que E se podría obtener de $D \rightarrow E$ si se dispusiera de D (por aplicación de **E**$\rightarrow$) y que D podría obtenerse de $A \rightarrow D$ si se dispusiera de A. Se dispone de A, pero formando parte de la disyunción $A \vee B$. Si a partir del supuesto de B también se pudiera obtener E, entonces una prueba por casos (**E**$\vee$) sobre $A \vee B$ sería procedente para el objetivo de obtener E. Podríamos darnos cuenta de que a partir de B y de $B \rightarrow C \vee D$ se obtiene $C \vee D$, y que tanto C como D permiten llegar a E. Siguiendo este planteamiento, la deducción quedará:

(1)	$A \vee B$			**P**
(2)	$B \rightarrow C \vee D$			**P**
(3)	$A \rightarrow D$			**P**
(4)	$D \rightarrow E$			**P**
(5)	$C \rightarrow A$			**P**
(6)		A		**H**
(7)		D		E$\rightarrow$ 3, 6
(8)		E		E$\rightarrow$ 4, 7
(9)		B		**H**
(10)		$C \vee D$		E$\rightarrow$ 2, 9
(11)			C	**H**
(12)			A	E$\rightarrow$ 5, 11
(13)			D	E$\rightarrow$ 3, 12
(14)			E	E$\rightarrow$ 4, 13
(15)			D	**H**
(16)			E	E$\rightarrow$ 4, 15
(17)		E		E$\vee$ 10, 14, 16
(18)	E			E$\vee$ 1, 8, 17

g) Planteamiento estratégico de la deducción: de entrada, se podría pensar en llegar a D por la vía de la reducción al absurdo (suponer $\neg D$, encontrar una contradicción, introducir la negación en el supuesto y obtener D). Es necesario observar, sin embargo, que $\neg D$ no aparece en el antecedente de ninguna de las implicaciones, por lo cual su utilidad puede ser discutible. Por otro lado, la existencia de una disyunción en las premisas nos puede hacer plantear la posibilidad de encarar la deducción como una prueba por casos (eliminación de $\vee$ en $A \vee B$). Observemos que a partir de B es relativamente simple llegar a D (de B se obtiene $B \vee C$ por **I**$\vee$, y de $B \vee C$ y $B \vee C \rightarrow D$ se obtiene D por **E**$\rightarrow$). La parte más complicada será la obtención de D a partir de A. Esquemáticamente:

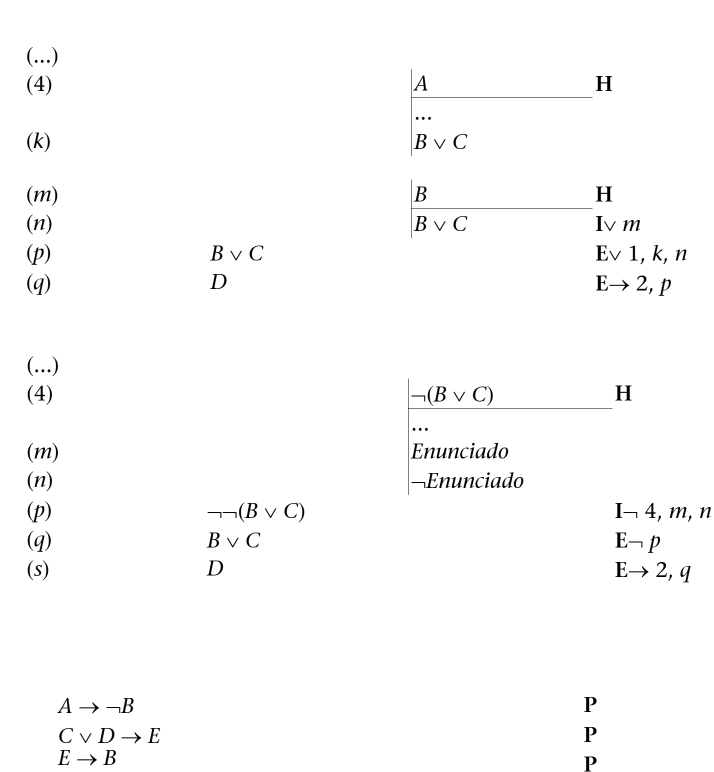


(...)			
(4)		A	**H**
		...	
(k)		D	
(m)		B	**H**
(n)		$B \vee C$	I$\vee$ m
(p)		D	E$\rightarrow$ 2, n
(q)	D		E$\vee$ 1, k, p

La obtención de D a partir de A y de las dos últimas premisas requiere un planteamiento cuidadoso. Observemos que suponer $\neg C$ nos conducirá a una contradicción (de $\neg C$ y $\neg C \rightarrow \neg A$ obtendremos $\neg A$ por $E\rightarrow$, pero ya tenemos A). De este modo, el supuesto de $\neg C$ nos permitirá obtener C que, a su vez, nos permitirá obtener $B \vee C$). Finalmente:

(1)	$A \vee B$			**P**
(2)	$B \vee C \rightarrow D$			**P**
(3)	$\neg C \rightarrow \neg A$			**P**
(4)		A		**H**
(5)			$\neg C$	**H**
(6)			$\neg A$	E$\rightarrow$ 3, 5
(7)			A	**it** 4
(8)		$\neg\neg C$		I$\neg$ 5, 6, 7
(9)		C		E$\neg$ 8
(10)		$B \vee C$		I$\vee$ 9
(11)		D		E$\rightarrow$ 2, 10
(12)		B		**H**
(13)		$B \vee C$		I$\vee$ 12
(14)		D		E$\rightarrow$ 2, 13
(15)	D			E$\vee$ 1, 11, 14

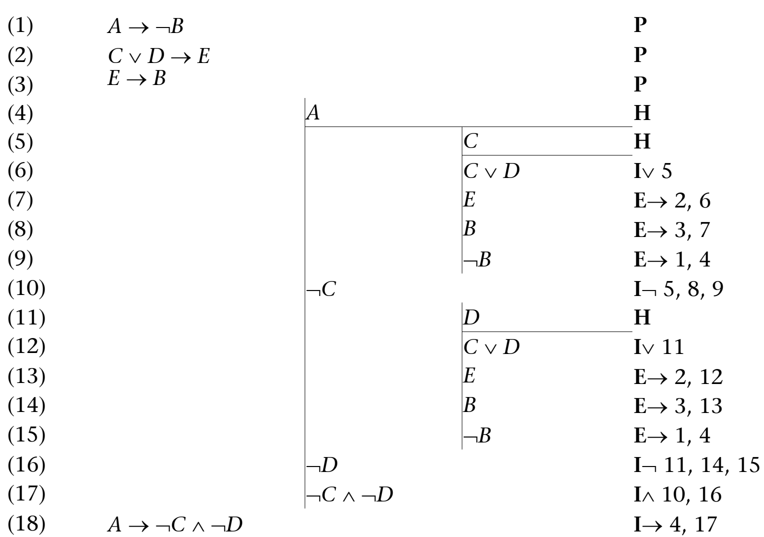
Otros planteamientos estratégicos pueden conducirnos a la obtención de *D* a partir de las premisas. Por ejemplo:



(...)			
(4)		A	**H**
		...	
(*k*)		$B \vee C$	
(*m*)		B	**H**
(*n*)		$B \vee C$	**I**$\vee$ *m*
(*p*)	$B \vee C$		**E**$\vee$ 1, *k*, *n*
(*q*)	D		**E**$\rightarrow$ 2, *p*

(...)			
(4)		$\neg(B \vee C)$	**H**
		...	
(*m*)		*Enunciado*	
(*n*)		$\neg$*Enunciado*	
(*p*)	$\neg\neg(B \vee C)$		**I**$\neg$ 4, *m*, *n*
(*q*)	$B \vee C$		**E**$\neg$ *p*
(*s*)	D		**E**$\rightarrow$ 2, *q*

h)

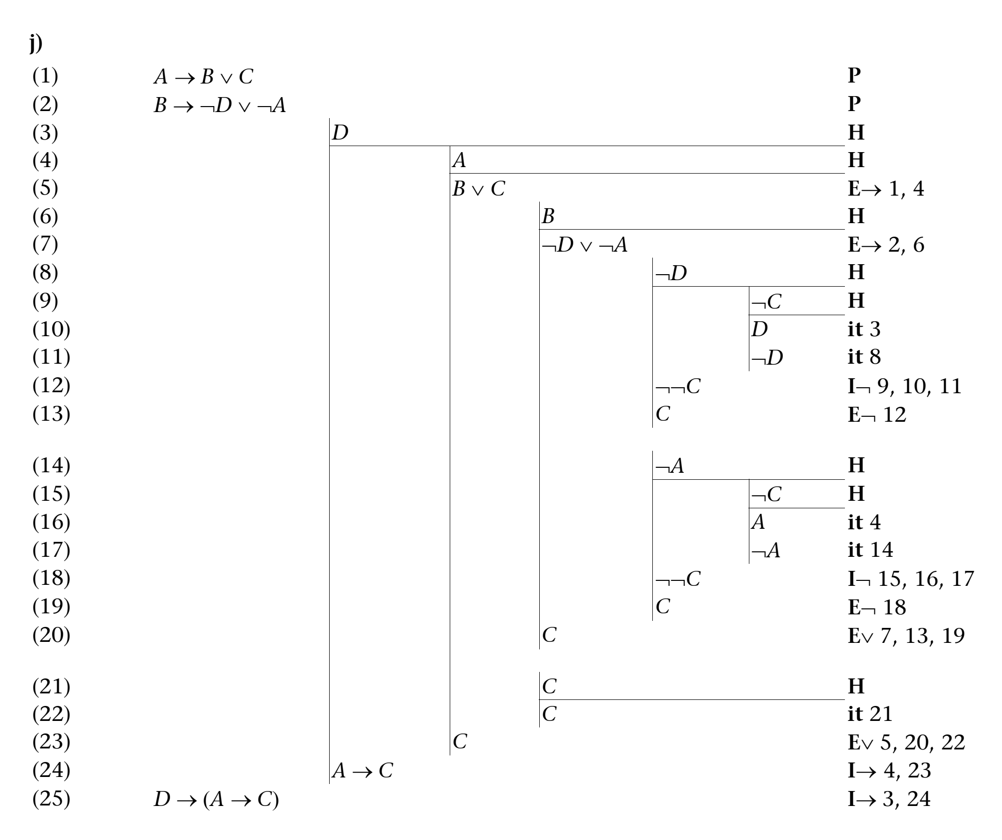


(1)	$A \rightarrow \neg B$			**P**
(2)	$C \vee D \rightarrow E$			**P**
(3)	$E \rightarrow B$			**P**
(4)		A		**H**
(5)			C	**H**
(6)			$C \vee D$	**I**$\vee$ 5
(7)			E	**E**$\rightarrow$ 2, 6
(8)			B	**E**$\rightarrow$ 3, 7
(9)			$\neg B$	**E**$\rightarrow$ 1, 4
(10)		$\neg C$		**I**$\neg$ 5, 8, 9
(11)			D	**H**
(12)			$C \vee D$	**I**$\vee$ 11
(13)			E	**E**$\rightarrow$ 2, 12
(14)			B	**E**$\rightarrow$ 3, 13
(15)			$\neg B$	**E**$\rightarrow$ 1, 4
(16)		$\neg D$		**I**$\neg$ 11, 14, 15
(17)		$\neg C \wedge \neg D$		**I**$\wedge$ 10, 16
(18)	$A \rightarrow \neg C \wedge \neg D$			**I**$\rightarrow$ 4, 17

i)

(1)	$A \rightarrow B$					**P**
(2)	$C \rightarrow D$					**P**
(3)		$A \vee C$				**H**
(4)			$\neg D$			**H**
(5)				A		**H**
(6)				B		**E**$\rightarrow$ 1, 5
(7)				C		**H**
(8)				D		**E**$\rightarrow$ 2, 7
(9)					$\neg B$	**H**
(10)					$\neg D$	**it** 4
(11)					D	**it** 8
(12)				$\neg\neg B$		**I**$\neg$ 9, 10, 11
(13)				B		**E**$\neg$ 12
(14)			B			**E**$\vee$ 3, 6, 13
(15)		$\neg D \rightarrow B$				**I**$\rightarrow$ 4, 14
(16)	$A \vee C \rightarrow (\neg D \rightarrow B)$					**I**$\rightarrow$ 3, 15

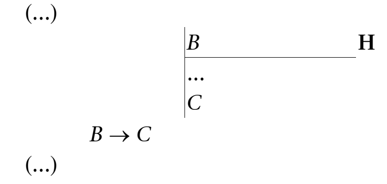
j)



(1)	$A \to B \vee C$	**P**
(2)	$B \to \neg D \vee \neg A$	**P**
(3)	D	**H**
(4)	A	**H**
(5)	$B \vee C$	**E**→ 1, 4
(6)	B	**H**
(7)	$\neg D \vee \neg A$	**E**→ 2, 6
(8)	$\neg D$	**H**
(9)	$\neg C$	**H**
(10)	D	**it** 3
(11)	$\neg D$	**it** 8
(12)	$\neg\neg C$	**I**¬ 9, 10, 11
(13)	C	**E**¬ 12
(14)	$\neg A$	**H**
(15)	$\neg C$	**H**
(16)	A	**it** 4
(17)	$\neg A$	**it** 14
(18)	$\neg\neg C$	**I**¬ 15, 16, 17
(19)	C	**E**¬ 18
(20)	C	**E**∨ 7, 13, 19
(21)	C	**H**
(22)	C	**it** 21
(23)	C	**E**∨ 5, 20, 22
(24)	$A \to C$	**I**→ 4, 23
(25)	$D \to (A \to C)$	**I**→ 3, 24

12.

a) La introducción de la implicación (**I**→) de la línea 6 no es correcta porque para introducir una implicación es necesario que primero se haya abierto una subdeducción encabezada (**H**) por el antecedente y que finalice con el consecuente. En este caso concreto, sería necesario tener algo como:



(...)
B **H**
...
C
$B \to C$
(...)

b) El error se halla en la línea 8. Se ha iterado un enunciado que forma parte de una subdeducción de un ámbito más interno que el actual (la línea 5 no es visible desde la línea 8).

c) La regla de introducción de la conjunción (línea 3) ha sido mal aplicada. Para introducir una conjunción es necesario que los dos conjuntandos estén disponibles. Y en este caso, el conjuntando B no aparece en ningún sitio.

d) La regla de eliminación de la conjunción ha sido mal aplicada sencillamente porque no se ha aplicado a una conjunción, sino a una negación. $\neg(A \wedge B)$ es la negación de un enunciado, no una conjunción (aunque el enunciado afectado por la negación contenga una conjunción). En resumen, ¡el paréntesis no se puede ignorar!

e) El error se halla en la línea 9. Se han utilizado enunciados (A y C) que están dentro del ámbito de una subdeducción que ya está cerrada (acabada). Esto sólo es posible hacerlo cuando se aplican las reglas **E**∨, **I**¬ o **I**→ (y hay que hacerlo tal y como estas reglas especifican).

f) El error se halla en la última línea. En este caso, la introducción de la disyunción será legítima siempre y cuando la parentización sea la correcta. Observad que $A \vee B \to (C \to D)$ no es una disyunción, sino una implicación –si se parentiza teniendo en cuenta la precedencia de las conectivas se ve claro, porque queda: $((A \vee B) \to (C \to D))$. Sí que habría sido correcto hacer:

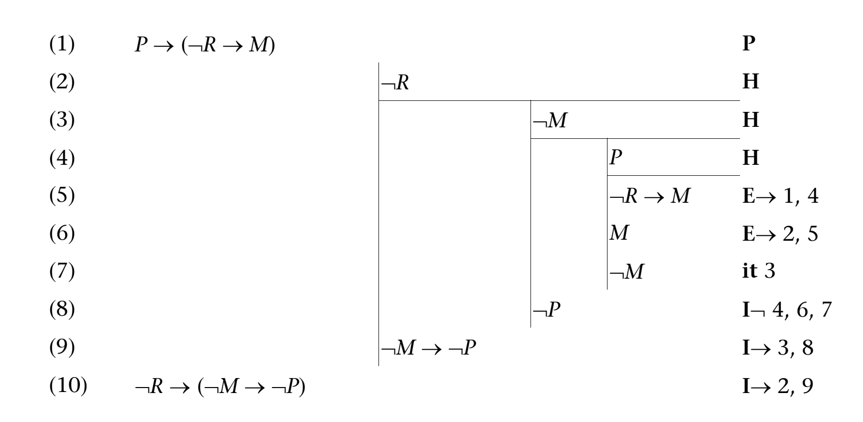
(...)
(8) $A \vee (B \to (C \to D))$ **I**∨ 7

Sin embargo, lamentablemente éste no es el enunciado que se pretende obtener.

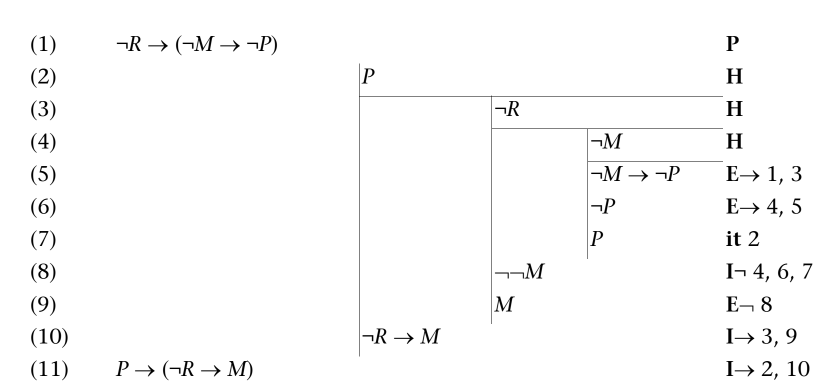
g) Otro ejemplo de iteración fuera de lugar. El enunciado que se itera (línea 7) se encuentra en una subdeducción que ya está cerrada.

13.

a) P: "Llueve"; M: "(Tú) te mojas"; R: "(Tú) llevas paraguas"
F_1: $P \to (\neg R \to M)$
F_2: $\neg R \to (\neg M \to \neg P)$

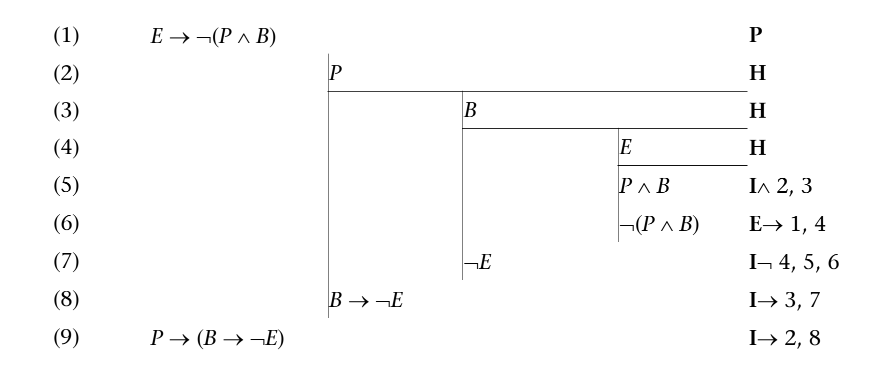


(1)	$P \to (\neg R \to M)$				**P**
(2)		$\neg R$			**H**
(3)			$\neg M$		**H**
(4)				P	**H**
(5)				$\neg R \to M$	**E→** 1, 4
(6)				M	**E→** 2, 5
(7)				$\neg M$	**it** 3
(8)			$\neg P$		**I¬** 4, 6, 7
(9)		$\neg M \to \neg P$			**I→** 3, 8
(10)	$\neg R \to (\neg M \to \neg P)$				**I→** 2, 9



(1)	$\neg R \to (\neg M \to \neg P)$				**P**
(2)		P			**H**
(3)			$\neg R$		**H**
(4)				$\neg M$	**H**
(5)				$\neg M \to \neg P$	**E→** 1, 3
(6)				$\neg P$	**E→** 4, 5
(7)				P	**it** 2
(8)			$\neg\neg M$		**I¬** 4, 6, 7
(9)			M		**E¬** 8
(10)		$\neg R \to M$			**I→** 3, 9
(11)	$P \to (\neg R \to M)$				**I→** 2, 10

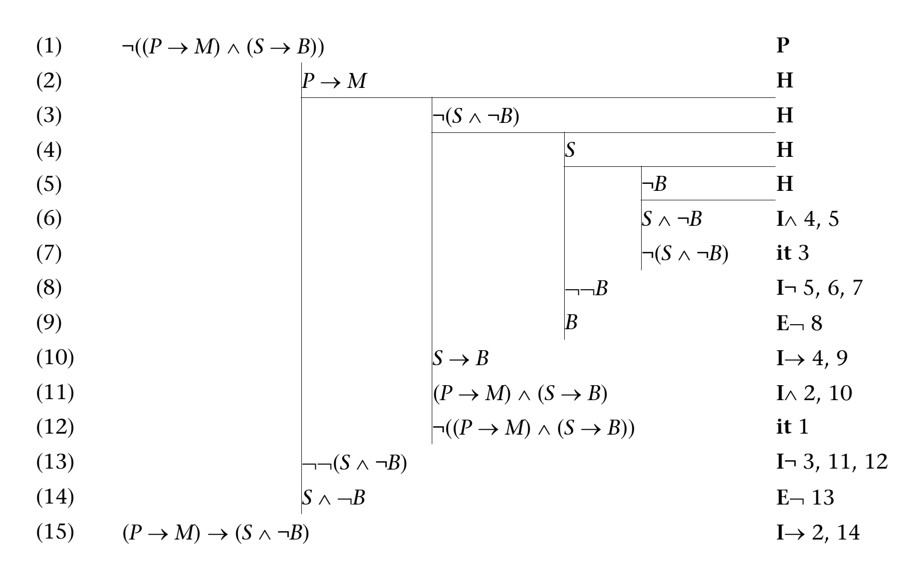
b) E: "(Tú) escuchas música"; P: "(Tú) hablas"; B: "(Tú) bailas"
F_1: $E \to \neg(P \wedge B)$
F_2: $P \to (B \to \neg E)$



(1)	$E \to \neg(P \wedge B)$				**P**
(2)		P			**H**
(3)			B		**H**
(4)				E	**H**
(5)				$P \wedge B$	**I∧** 2, 3
(6)				$\neg(P \wedge B)$	**E→** 1, 4
(7)			$\neg E$		**I¬** 4, 5, 6
(8)		$B \to \neg E$			**I→** 3, 7
(9)	$P \to (B \to \neg E)$				**I→** 2, 8

(1)	$P \to (B \to \neg E)$			**P**
(2)		E		**H**
(3)			$P \wedge B$	**H**
(4)			P	**E∧** 3
(5)			B	**E∧** 3
(6)			$B \to \neg E$	**E→** 1, 4
(7)			$\neg E$	**E→** 5, 6
(8)			E	**it** 2
(9)		$\neg(P \wedge B)$		**I¬** 3, 7, 8
(10)	$E \to \neg(P \wedge B)$			**I→** 2, 9

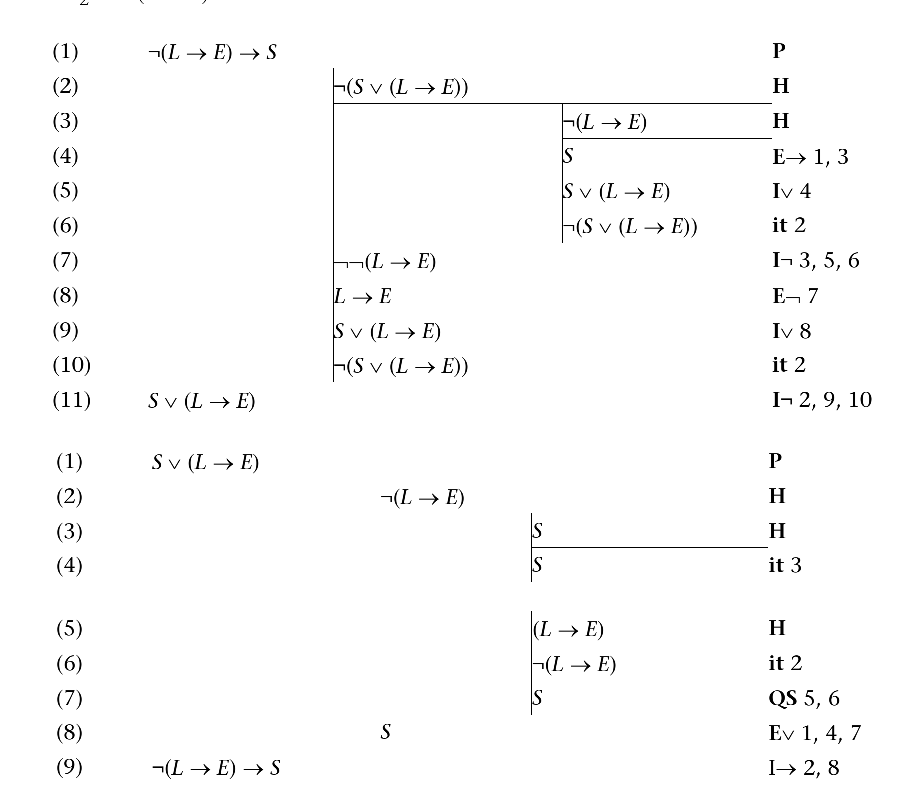
c) P: "Llueve"; M: "(Tú) te mojas"; S: "Hace sol"; B: "(Tú) te bronceas"
F_1: $\neg((P \to M) \wedge (S \to B))$
F_2: $(P \to M) \to (S \wedge \neg B)$



(1)	$\neg((P \to M) \wedge (S \to B))$	**P**
(2)	$P \to M$	**H**
(3)	$\neg(S \wedge \neg B)$	**H**
(4)	S	**H**
(5)	$\neg B$	**H**
(6)	$S \wedge \neg B$	**I∧** 4, 5
(7)	$\neg(S \wedge \neg B)$	**it** 3
(8)	$\neg\neg B$	**I¬** 5, 6, 7
(9)	B	**E¬** 8
(10)	$S \to B$	**I→** 4, 9
(11)	$(P \to M) \wedge (S \to B)$	**I∧** 2, 10
(12)	$\neg((P \to M) \wedge (S \to B))$	**it** 1
(13)	$\neg\neg(S \wedge \neg B)$	**I¬** 3, 11, 12
(14)	$S \wedge \neg B$	**E¬** 13
(15)	$(P \to M) \to (S \wedge \neg B)$	**I→** 2, 14

(1)	$(P \to M) \to S \wedge \neg B$	**P**
(2)	$(P \to M) \wedge (S \to B)$	**H**
(3)	$P \to M$	**E∧** 2
(4)	$S \wedge \neg B$	**E→** 1, 3
(5)	$S \to B$	**E∧** 2
(6)	S	**E∧** 4
(7)	B	**E→** 5, 6
(8)	$\neg B$	**E∧** 4
(9)	$\neg((P \to M) \wedge (S \to B))$	**I¬** 2, 7, 8

d) S: "Hace sol"; E: "Se encienden las luces"; L: "Se lee"
F_1: $\neg(L \to E) \to S$
F_2: $S \vee (L \to E)$



(1)	$\neg(L \to E) \to S$	**P**
(2)	$\neg(S \vee (L \to E))$	**H**
(3)	$\neg(L \to E)$	**H**
(4)	S	**E→** 1, 3
(5)	$S \vee (L \to E)$	**I∨** 4
(6)	$\neg(S \vee (L \to E))$	**it** 2
(7)	$\neg\neg(L \to E)$	**I¬** 3, 5, 6
(8)	$L \to E$	**E¬** 7
(9)	$S \vee (L \to E)$	**I∨** 8
(10)	$\neg(S \vee (L \to E))$	**it** 2
(11)	$S \vee (L \to E)$	**I¬** 2, 9, 10

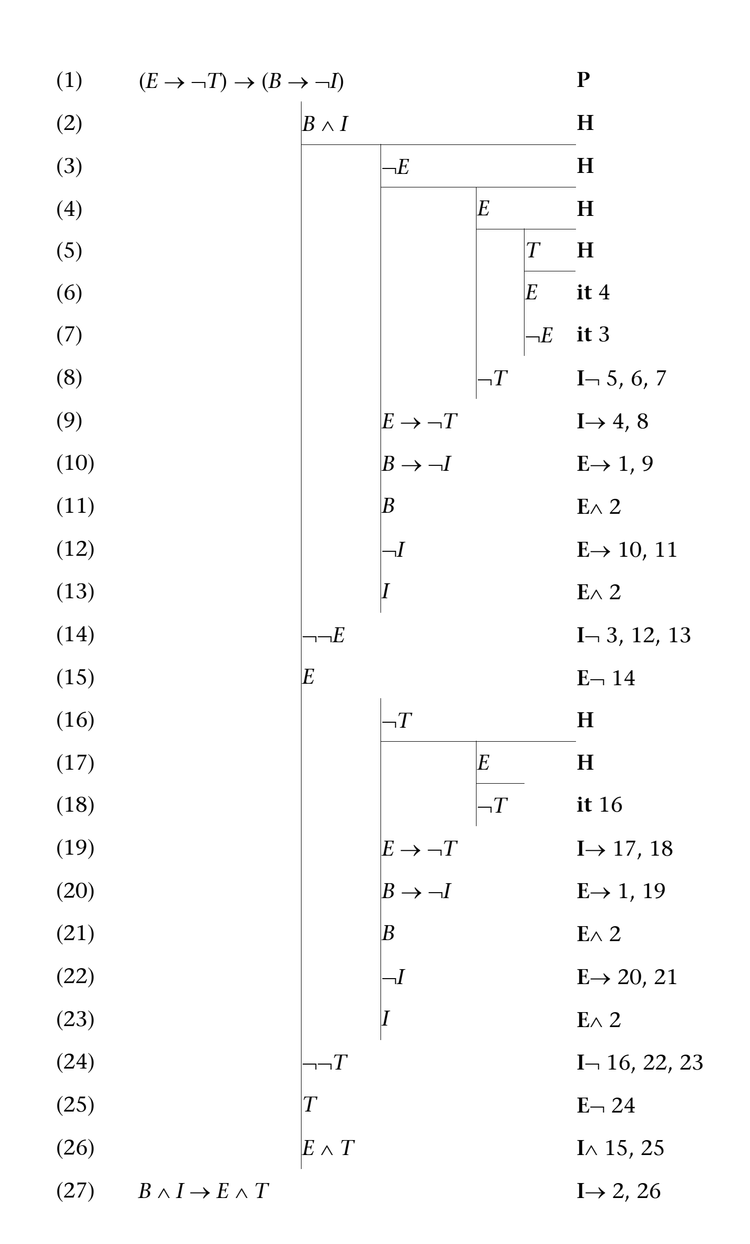
(1)	$S \vee (L \to E)$	**P**
(2)	$\neg(L \to E)$	**H**
(3)	S	**H**
(4)	S	**it** 3
(5)	$(L \to E)$	**H**
(6)	$\neg(L \to E)$	**it** 2
(7)	S	**QS** 5, 6
(8)	S	**E∨** 1, 4, 7
(9)	$\neg(L \to E) \to S$	**I→** 2, 8

e) *B*: “La bolsa sube”; *I*: “La inflación baja”; *E*: “Las empresas ganan dinero”; *T*: “Los trabajadores tienen incrementos salariales”.

F_1: $B \wedge I \to E \wedge T$

F_2: $(E \to \neg T) \to (B \to \neg I)$

(1)	$B \wedge I \to E \wedge T$				**P**
(2)		$E \to \neg T$			**H**
(3)			B		**H**
(4)				I	**H**
(5)				$B \wedge I$	**I**∧ 3, 4
(6)				$E \wedge T$	**E**→ 1, 5
(7)				E	**E**∧ 6
(8)				$\neg T$	**E**→ 2, 7
(9)				T	**E**∧ 6
(10)			$\neg I$		**I**¬ 4, 8, 9
(11)		$B \to \neg I$			**I**→ 3, 10
(12)	$(E \to \neg T) \to (B \to \neg I)$				**I**→ 2, 11



(1)	$(E \to \neg T) \to (B \to \neg I)$					**P**
(2)		$B \wedge I$				**H**
(3)			$\neg E$			**H**
(4)				E		**H**
(5)					T	**H**
(6)					E	**it** 4
(7)					$\neg E$	**it** 3
(8)				$\neg T$		**I**¬ 5, 6, 7
(9)			$E \to \neg T$			**I**→ 4, 8
(10)			$B \to \neg I$			**E**→ 1, 9
(11)			B			**E**∧ 2
(12)			$\neg I$			**E**→ 10, 11
(13)			I			**E**∧ 2
(14)		$\neg\neg E$				**I**¬ 3, 12, 13
(15)		E				**E**¬ 14
(16)			$\neg T$			**H**
(17)				E		**H**
(18)				$\neg T$		**it** 16
(19)			$E \to \neg T$			**I**→ 17, 18
(20)			$B \to \neg I$			**E**→ 1, 19
(21)			B			**E**∧ 2
(22)			$\neg I$			**E**→ 20, 21
(23)			I			**E**∧ 2
(24)		$\neg\neg T$				**I**¬ 16, 22, 23
(25)		T				**E**¬ 24
(26)		$E \wedge T$				**I**∧ 15, 25
(27)	$B \wedge I \to E \wedge T$					**I**→ 2, 26

14.

a) *P*: "Llueve"; *S*: "Hace sol"; *M*: "Sale el arco iris"; *C*: "Hay polución"

$$P \wedge S \rightarrow M, M \rightarrow \neg C, S \wedge C \therefore \neg P$$

(1)	$P \wedge S \rightarrow M$		**P**
(2)	$M \rightarrow \neg C$		**P**
(3)	$S \wedge C$		**P**
(4)		P	**H**
(5)		S	**E**$\wedge$ 3
(6)		$P \wedge S$	**I**$\wedge$ 4, 5
(7)		M	**E**$\rightarrow$ 1, 6
(8)		$\neg C$	**E**$\rightarrow$ 2, 7
(9)		C	**E**$\wedge$ 3
(10)	$\neg P$		**I**$\neg$ 4, 8, 9

b) *J*: "Juan llega tarde"; *M*: "María se enfada"; *P*: "Pedro está contento"; *F*: "El hijo de Pedro llora"

$$J \wedge M, P \rightarrow \neg M, \neg P \rightarrow F \therefore F \vee \neg J$$

(1)	$J \wedge M$	**P**
(2)	$P \rightarrow \neg M$	**P**
(3)	$\neg P \rightarrow F$	**P**
(4)	M	**E**$\wedge$ 1
(5)	$\neg P$	**MT** 2, 4
(6)	F	**E**$\rightarrow$ 3, 5
(7)	$F \vee \neg J$	**I**$\vee$ 6

c) *C*: "Hay pasteles"; *P*: "Hay pan"; *E*: "Pueden hacerse bocadillos"; *S*: "Hay azúcar"

$$\neg C \vee \neg P, E \rightarrow P, \neg C \rightarrow \neg S, S \therefore \neg E$$

(1)	$\neg C \vee \neg P$	**P**
(2)	$E \rightarrow P$	**P**
(3)	$\neg C \rightarrow \neg S$	**P**
(4)	S	**P**
(5)	C	**MT** 3, 4
(6)	$\neg P$	**SD** 1, 5
(7)	$\neg E$	**MT** 6, 2

d) *M*: "El maquinista se duerme"; *T*: "El tren llega tarde"; *S*: "El supervisor se enfada"; *P*: "Los pasajeros gritan"; *R*: "Hay reclamaciones"

$$T \rightarrow M, M \rightarrow S \wedge P, R \rightarrow T, R \therefore P$$

(1)	$T \rightarrow M$	**P**
(2)	$M \rightarrow S \wedge P$	**P**
(3)	$R \rightarrow T$	**P**
(4)	R	**P**
(5)	T	**E**$\rightarrow$ 3, 4
(6)	M	**E**$\rightarrow$ 1, 5
(7)	$S \wedge P$	**E**$\rightarrow$ 2, 6
(8)	P	**E**$\wedge$ 7

e) *B*: “La bolsa sube”; *E*: “Los beneficios empresariales suben”; *T*: “Los bonos del tesoro bajan”; *I*: “Hay inflación baja”; *X*: “Hay inversión extranjera”

$$B \to E \wedge T, \text{I} \to T, E \wedge T \to X, I \to E \therefore B \vee I \to X$$

(1)	$B \to E \wedge T$			**P**
(2)	$I \to T$			**P**
(3)	$E \wedge T \to X$			**P**
(4)	$I \to E$			**P**
(5)		$B \vee I$		**H**
(6)			B	**H**
(7)			$B \to X$	**SH** 1, 3
(8)			X	**E**→ 6, 7
(9)			I	**H**
(10)			E	**E**→ 4, 9
(11)			T	**E**→ 2, 9
(12)			$E \wedge T$	**I**∧ 10, 11
(13)			X	**E**→ 3, 12
(14)		X		**E**∨ 5, 8, 13
(15)	$B \vee I \to X$			**I**→ 5, 14

f) *A*: “La temperatura en la alta atmósfera es baja; *H*: “Hay riesgo de huracanes”; *T*: “Hay riesgo de tempestades”; *P*: “La presión es alta”; *E*: “La atmósfera está cargada de electricidad”; *C*: “Se forma granizo”; *M*: “Hay formaciones montañosas”

$$A \wedge \neg(T \to H) \to P, H \wedge T \to E, A \to (C \to \neg E), M \to C \therefore A \wedge T \to (M \to P)$$

(1)	$A \wedge \neg(T \to H) \to P$				**P**
(2)	$H \wedge T \to E$				**P**
(3)	$A \to (C \to \neg E)$				**P**
(4)	$M \to C$				**P**
(5)		$A \wedge T$			**H**
(6)			M		**H**
(7)			C		**E**→ 4, 6
(8)			A		**E**∧ 5
(9)			$C \to \neg E$		**E**→ 3, 8
(10)			$\neg E$		**E**→ 7, 9
(11)			$\neg(H \wedge T)$		**MT** 2, 10
(12)				$T \to H$	**H**
(13)				T	**E**∧ 5
(14)				H	**E**→ 12, 13
(15)				$H \wedge T$	**I**∧ 14, 13
(16)			$\neg(T \to H)$		**I**¬ 12, 11, 15
(17)			$A \wedge \neg(T \to H)$		**I**∧ 8, 16
(18)			P		**E**→ 1, 17
(19)		$M \to P$			**I**→ 6, 18
(20)	$A \wedge T \to (M \to P)$				**I**→ 5, 19

15.

a)

P	Q	R	$(P \to Q) \to R$	$(P \wedge \neg Q) \vee R$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

b) ¡Atención! Tened en cuenta que la asociatividad de las conectivas es de izquierda a derecha, por lo cual $A \to B \to C$ es lo mismo que $(A \to B) \to C$.

P	Q	R	$P \to Q \to R$	$(\neg P \to R) \wedge (Q \to R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

c)

P	Q	$P \wedge (P \to Q)$	$\neg(Q \to \neg P)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

16.

A	B	C	D	$(A \to B) \wedge (C \to D)$	$A \vee C \to B \vee D$
V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

Las tablas de verdad son diferentes y, por lo tanto, los enunciados dados no son deductivamente equivalentes. Ahora bien, es fácil observar que siempre que el primero es cierto el segundo también lo es (pero no al revés). Esto quiere decir que:

$$(A \to B) \wedge (C \to D) \vdash A \vee C \to B \vee D$$

17.

A	B	C	$\neg(A \to C)$	$\neg A \vee B$	$B \to C$	C
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

En la tabla de verdad vemos que no hay ninguna interpretación que haga ciertas todas las premisas simultáneamente. Entonces, todas las interpretaciones que hacen ciertas la premisa (ninguna) también hacen cierta la conclusión. Dado que las premisas de este razonamiento son inconsistentes, su validez es independiente de la conclusión (con cualquier otra conclusión el razonamiento también sería válido).

18.

a) A: "(Tú) viajas en avión"; E: "(Tú) te esperas en el aeropuerto"; H: "(Tú) te pones de mal humor"

$$A \to E, H \to E \therefore A \to H$$

Para buscar un contraejemplo puede construirse la tabla de verdad de las premisas y la conclusión hasta llegar a encontrar una interpretación que haga ciertas las primeras y falsa la segunda:

A	E	H	$A \to E$	$H \to E$	$A \to H$
V	V	V	V	V	V
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

La interpretación { $A = V$, $E = V$, $H = F$ } es un contraejemplo.

b) G: "(Tú) tienes ganas de venir"; C: "(Tú) te quedas en casa viendo la tele"; T: "(Tú) llamas para decirnos que tienes ganas de venir"; M: "(Tú) estás enfermo"

$$G \vee C, G \to T, M \to C \therefore \neg T \to M$$

No siempre hay que construir totalmente o parcialmente la tabla de verdad para encontrar un contraejemplo. Observémoslo: un contraejemplo debe hacer las premisas ciertas y la conclusión falsa. En este razonamiento, la conclusión sólo es falsa cuando $T = F$ y $M = F$. Si $M = F$, la tercera premisa seguro que es cierta. Si $T = F$, la segunda premisa será cierta si $G = F$. Si $G = F$, la primera premisa será cierta si $C = V$. De este modo, la interpretación que estamos buscando es { $G = F$, $C = V$, $T = F$, $M = F$ }.

c) G: "(Tú) tienes hambre"; S: "(Tú) tienes sed"; C: "(Tú) estás cansado"

$$G \to (C \to S), \neg(S \to G) \therefore \neg(C \to \neg S)$$

La interpretación { $G = F$, $C = F$, $S = V$ } es un contraejemplo del razonamiento dado.

19.
a)

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	A	$\neg A \vee \neg C$
V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F		
V	F	V	F			
V	F	F	F			
F	V	V	V	V	F	
F	V	F	V	F		
F	F	V	V	V	F	
F	F	F	V	V	F	

No hay ninguna interpretación que haga ciertos todos los enunciados simultáneamente. El conjunto es inconsistente. Observad que no es estrictamente necesario llenar toda la tabla. Cuando una premisa es falsa para una interpretación ya no es necesario preguntarse por las otras porque seguro que aquella interpretación no las hace todas ciertas.

b)

A	B	C	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$B \to A$	$A \to (C \to B)$	C
V	V	V	V	F			
V	V	F	V	F			
V	F	V	V	V	V	F	
V	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	V	V	F		
F	V	F	V	V	F		
F	F	V	F				
F	F	F	F				

No hay ninguna interpretación que haga ciertos todos los enunciados simultáneamente. El conjunto es inconsistente.

20.
a)

(1)	$A \to B$	**P**
(2)	$B \to C$	**P**
(3)	A	**P**
(4)	$\neg A \vee \neg C$	**P**
(5)	$\neg C$	**SD** 3, 4
(6)	$\neg B$	**MT** 2, 5
(7)	$\neg A$	**MT** 1, 6
(8)	$\boldsymbol{A \wedge \neg A}$	**I**$\wedge$ 3, 7

b)

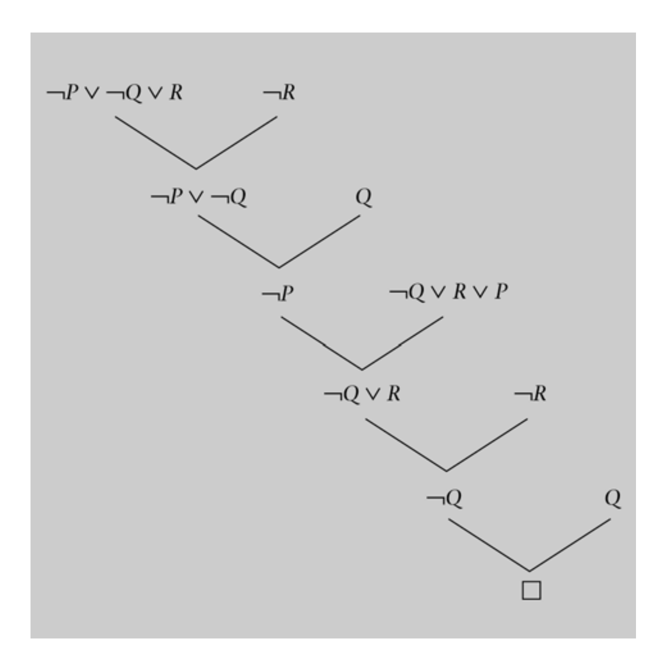
(1)	$A \vee B$		**P**
(2)	$\neg(A \wedge B)$		**P**
(3)	$B \to A$		**P**
(4)	$A \to (C \to B)$		**P**
(5)	C		**P**
(6)		A	**H**
(7)		$C \to B$	**E**$\to$ 4, 6
(8)		B	**E**$\to$ 5, 7
(9)		$A \wedge B$	**I**$\wedge$ 6, 8
(10)		B	**H**
(11)		A	**E**$\to$ 3, 10
(12)		$A \wedge B$	**I**$\wedge$ 11, 10
(13)	$A \wedge B$		**E**$\vee$ 1, 9, 12
(14)	$\boldsymbol{(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)}$		**I**$\wedge$ 13, 2

21.

a)

- $\text{FNC}(P \wedge Q \rightarrow R) = \neg P \vee \neg Q \vee R$
- $\text{FNC}(Q \rightarrow (\neg R \rightarrow P)) = \neg Q \vee R \vee P$
- $\text{FNC}(\neg(Q \rightarrow R)) = Q \wedge \neg R$

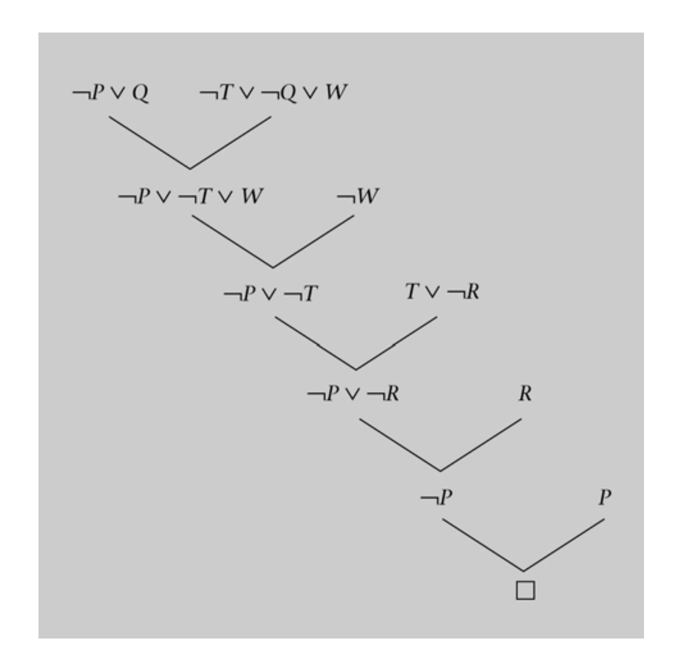
$$\{ \neg P \vee \neg Q \vee R\ ,\ \neg Q \vee R \vee P,\ Q,\ \neg R \}$$



b)

- $\text{FNC}(P \rightarrow Q) = \neg P \vee Q$
- $\text{FNC}(\neg T \rightarrow \neg R) = T \vee \neg R$
- $\text{FNC}(T \wedge Q \rightarrow W) = \neg T \vee \neg Q \vee W$
- $\text{FNC}(\neg(R \rightarrow (P \rightarrow W))) = R \wedge P \wedge \neg W$

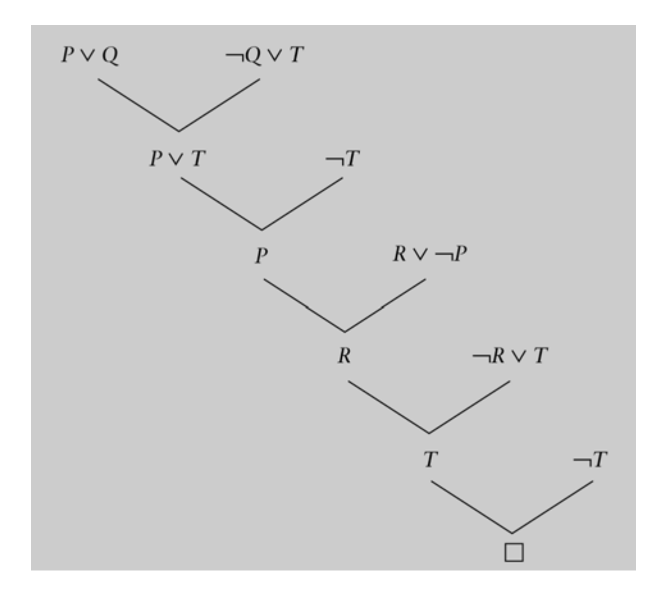
$$\{ \neg P \vee Q,\ T \vee \neg R,\ \neg T \vee \neg Q \vee W,\ R,\ P,\ \neg W \}$$



c)

- $\text{FNC}(P \vee Q) = P \vee Q$
- $\text{FNC}(Q \vee R \rightarrow T) = (\neg Q \vee T) \wedge (\neg R \vee T)$
- $\text{FNC}(\neg R \rightarrow \neg P) = R \vee \neg P$
- $\text{FNC}(\neg T) = \neg T$

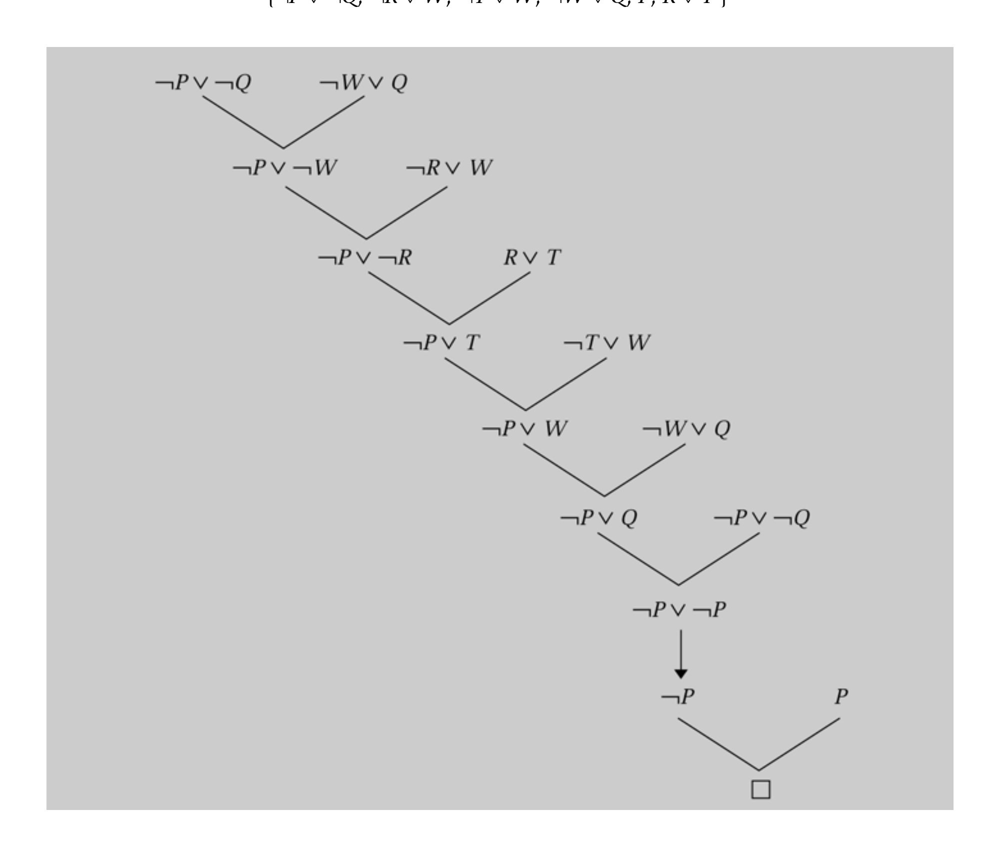
$$\{ P \vee Q, \neg Q \vee T, \neg R \vee T, R \vee \neg P, \neg T \}$$



d)

- $\text{FNC}(P \rightarrow \neg Q) = \neg P \vee \neg Q$
- $\text{FNC}(R \vee T \rightarrow W) = (\neg R \vee W) \wedge (\neg T \vee W)$
- $\text{FNC}(W \rightarrow Q) = \neg W \vee Q$
- $\text{FNC}(\neg(P \rightarrow \neg R \wedge \neg T)) = P \wedge (R \vee T)$

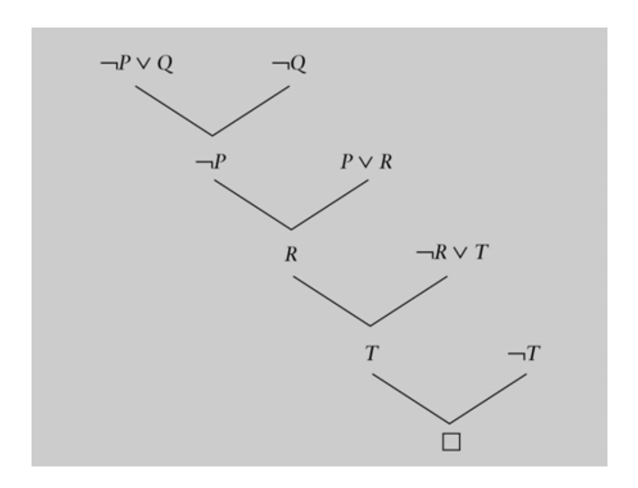
$$\{\neg P \vee \neg Q, \neg R \vee W, \neg T \vee W, \neg W \vee Q, P, R \vee T \}$$



e)

- FNC($P \to Q$) = $\neg P \vee Q$
- FNC($R \to T$) = $\neg R \vee T$
- FNC($\neg(P \vee R \to (\neg T \to Q))$) = $(P \vee R) \wedge \neg T \wedge \neg Q$

$$\{ \neg P \vee Q, \neg R \vee T, P \vee R, \neg T, \neg Q \}$$

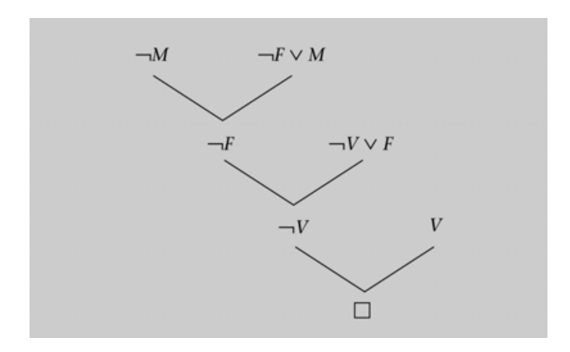


22. En la solución de este ejercicio, las cláusulas en letra negrita son las que provienen de la negación de la conclusión.

a) F: "(Tú) fracasas"; M: "(Tú) tienes mala memoria"; V: "(Tú) tienes poca voluntad"

$$M \vee V \to F, F \to M \therefore \neg M \to \neg V$$

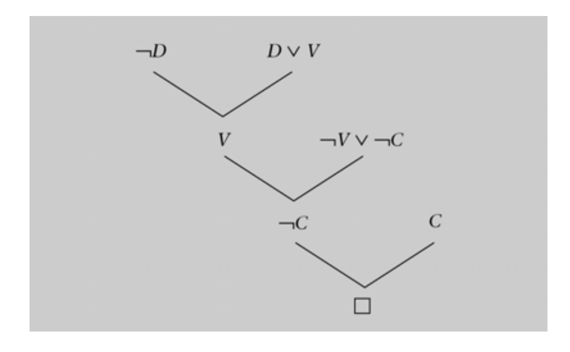
De las premisas y la negación de la conclusión se obtiene el siguiente conjunto de cláusulas: { $\neg M \vee F$, $\neg V \vee F$, $\neg F \vee M$, **¬M, V** }. Podemos observar que la cláusula $\neg M \vee F$ puede descartarse porque queda subsumida por la cláusula $\neg M$.



b) *V*: "(Ellos) vienen"; *D*: "(Ellos) tienen (han tenido) tiempo para prepararse algo para comer"; *C*: "(Nosotros) podemos ir al cine"

$$(V \to \neg D) \wedge (\neg D \to V), V \to \neg C, C \therefore D$$

De las premisas y la negación de la conclusión se obtiene el siguiente conjunto de cláusulas: { $\neg V \vee \neg D$, $D \vee V$, $\neg V \vee \neg C$, C, **¬*D*** }. Podemos observar que la cláusula $\neg V \vee \neg D$ es prescindible porque $\neg D$ la subsume.



c) *T*: "(Tú) compras naranjas"; *P*: "(Tú) compras manzanas"; *C*: "(Yo) haré un pastel"; *M*: "(Yo) haré mermelada"

$$(T \vee P) \wedge \neg(T \wedge P), (P \rightarrow C) \wedge (\neg P \rightarrow M) \therefore (C \vee M) \wedge \neg(C \wedge M)$$

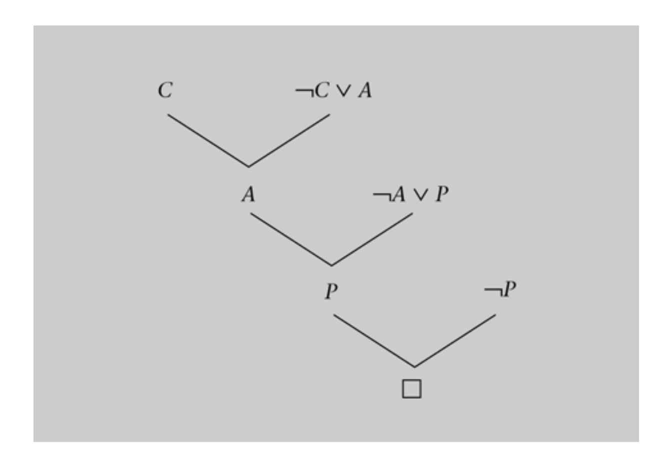
De las premisas y la negación de la conclusión se obtiene el siguiente conjunto de cláusulas: $\{ T \vee P, \neg T \vee \neg P, \neg P \vee C, P \vee M, \mathbf{\neg C \vee M}, \mathbf{\neg M \vee C} \}$

El razonamiento no es correcto. Empezando por las cláusulas del conjunto de apoyo se llega siempre a un teorema: resolviendo $\neg C \vee M$ contra $\neg M \vee C$ se obtiene $\neg C \vee C$ y resolviendo$\neg M \vee C$ contra $\neg C \vee M$ se obtiene $\neg M \vee M$. Observad que $\neg C \vee M$ no puede resolverse con otra cláusula que no sea $\neg M \vee C$ y que $\neg M \vee C$ no se puede resolver contra ninguna cláusula que no sea $\neg C \vee M$. Llegados a este punto, si el razonamiento es correcto, lo es por inconsistencia de las premisas. Sin embargo, el conjunto $\{ T \vee P, \neg T \vee \neg P, \neg P \vee C, P \vee M \}$ no permite llegar a la cláusula vacía ($P \vee M$ es prescindible por ausencia de $\neg M$ y $\neg P \vee C$ es prescindible por ausencia de $\neg C$. De las otras dos cláusulas sólo puede obtenerse un teorema). Con todo esto, ya podemos concluir que el razonamiento no es correcto.

d) *C*: "El presentador es competente"; *A*: "El presentador mantiene la audiencia"; *P*: "La empresa promociona al presentador"

$$(C \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow P), \neg P \therefore \neg C$$

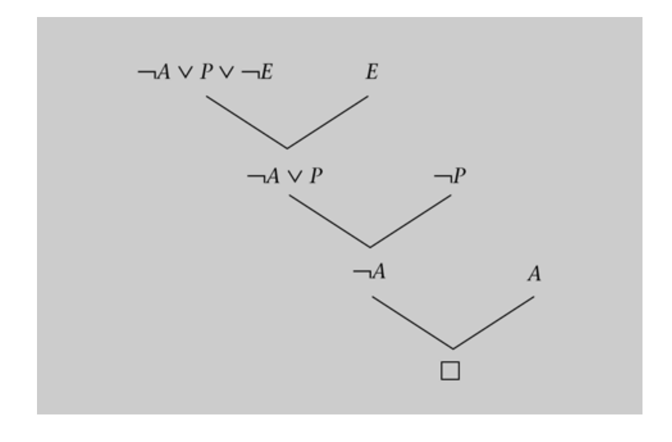
De las premisas y la negación de la conclusión se obtiene el conjunto: $\{\neg C \vee A, \neg A \vee P, \neg P, \mathbf{C}\}$.



e) *P*: "(Tú) eres paciente"; *E*: "(Tú) tienes éxito en los negocios"; *A*: "(Tú) quieres llegar arriba del todo"; *R*: "(Tú) has recibido una educación equilibrada"

$$A \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg E), \neg R \rightarrow \neg P, \neg P \wedge A \wedge E \therefore \neg R$$

De este razonamiento se obtiene el conjunto de cláusulas: $\{ \neg A \vee P \vee \neg E, R \vee \neg P, \neg P, A, E, \mathbf{R} \}$. Puede observarse que la cláusula del apoyo no puede ser útil para llegar a □ porque no se dispone del literal $\neg R$ (por la misma razón, la cláusula $R \vee \neg P$ es prescindible). Esto quiere decir que si el razonamiento es correcto, lo es por inconsistencia de las premisas. Y, efectivamente, las premisas son inconsistentes:



f) C: “Las condiciones climáticas son adecuadas”; B: “Salen setas”; P: “Los bosques están llenos (se llenan) de buscadores de setas”

$$C \rightarrow B,\ B \rightarrow P,\ P \therefore C$$

De las premisas y la negación de la conclusión se obtiene el conjunto:

$$\{ \neg C \vee B,\ \neg B \vee P,\ P,\ \mathbf{\neg C} \}.$$

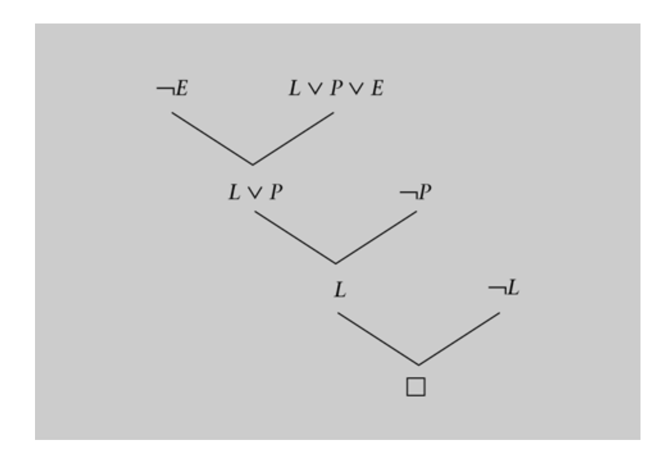
Podemos ver que el razonamiento no es correcto si nos damos cuenta de que el conjunto de cláusulas nunca permitirá la obtención de la cláusula vacía: la cláusula $\neg C \vee B$ es subsumida por $\neg C$ y la cláusula $\neg B \vee P$ lo es por P. Esto hace que el conjunto de cláusulas potencialmente útiles se reduzca a $\{ P, \neg C \}$ y de este conjunto no se obtendrá $\square$.

g) P: “Los productos se abaratan”; E: “Las exportaciones se paran”; L: “Se promulgan leyes específicas”

$$\neg L \rightarrow (\neg P \rightarrow E),\ \neg P \wedge \neg L \therefore E$$

De este razonamiento se obtiene el conjunto de cláusulas:

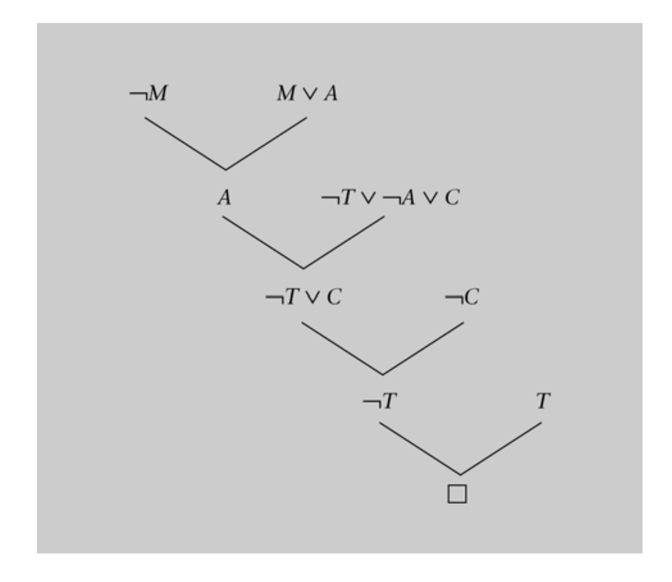
$$\{ L \vee P \vee E,\ \neg P,\ \neg L,\ \mathbf{\neg E} \}.$$



h) T: “(Tú) sales tarde de casa”; C: “(Tú) corres”; A: “(Tú) tomas el autobús”; M: “El metro funciona”

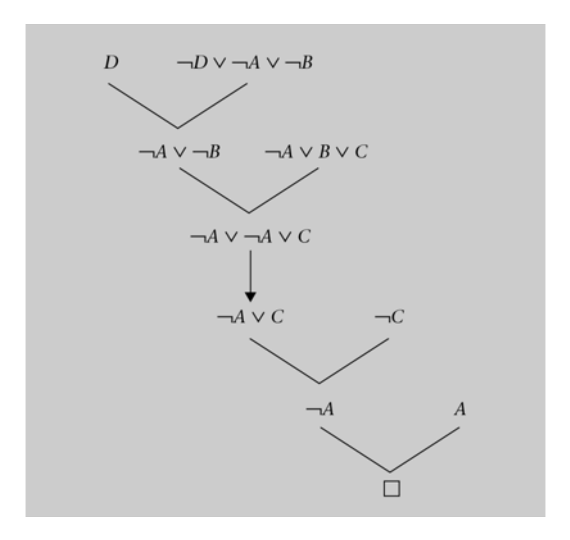
$$T \rightarrow (A \rightarrow C);\ \neg M \rightarrow A \therefore \neg M \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg T)$$

El conjunto de cláusulas que se obtiene del razonamiento es: $\{ \neg T \vee \neg A \vee C,\ M \vee A,\ \mathbf{\neg M},\ \mathbf{\neg C},\ \mathbf{T} \}$.

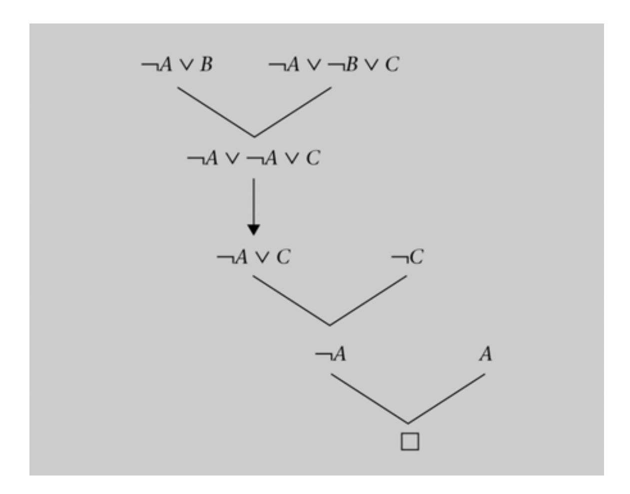


23.

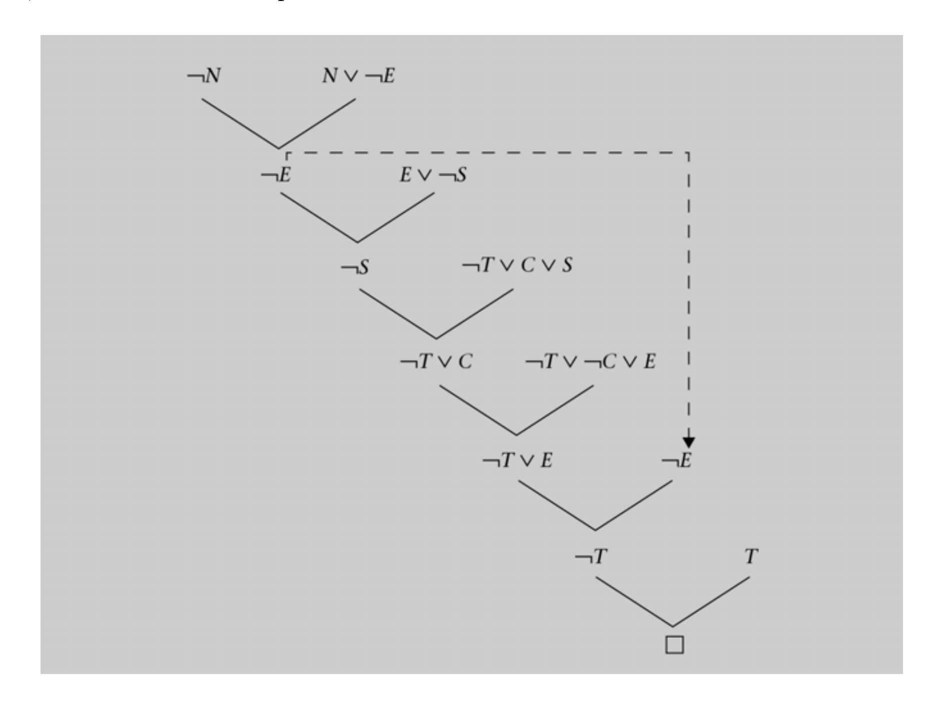
a) Razonamiento correcto, premisas consistentes.



b) Razonamiento correcto, premisas inconsistentes. Puede llegarse a la cláusula vacía sin utilizar ninguna cláusula del apoyo:

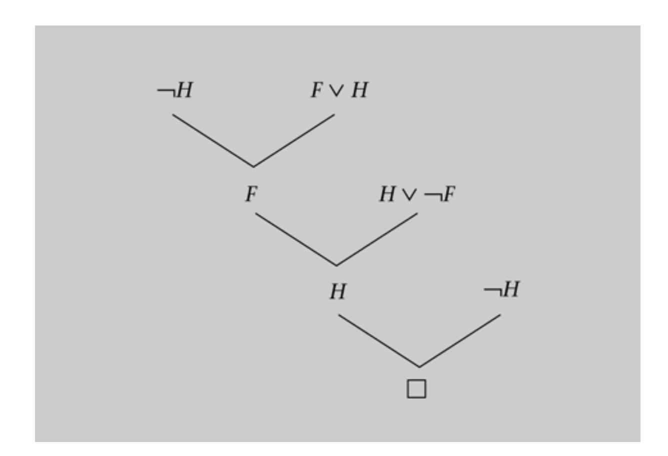


c) Razonamiento correcto, premisas consistentes



d) Razonamiento incorrecto. Observad que la cláusula $P \vee Q \vee R$ puede descartarse porque P la subsume. De este modo, el conjunto de cláusulas potencialmente útiles se reduce al siguiente: $\{ \neg S \vee \neg P \vee \neg Q, S, \neg R, P \}$. Sin embargo, de este conjunto también puede descartarse $\neg S \vee \neg P \vee \neg Q$ por ausencia del literal $\neg Q$. Y del conjunto $\{ S, \neg R, P \}$ no puede obtenerse la cláusula vacía.

e) Razonamiento correcto, premisas consistentes. La cláusula $H \vee \neg G \vee \neg F$ puede descartarse porque $H \vee \neg F$ la subsume. $G \vee \neg H$ también puede descartarse porque $\neg H$ la subsume. Con el resto de las cláusulas se puede llegar a $\square$:



f) Razonamiento incorrecto. Observad que ninguna de las cláusulas que contienen $\neg R$ puede ser útil para llegar a la cláusula vacía. Esto reduce el conjunto de cláusulas potencialmente útiles a $\{ P \vee Q, T \}$ y de este conjunto no se puede obtener.

Glosario

átomo
Formalización de una frase declarativa simple**.**

cláusula
Disyunción de literales.

conclusión
Última frase (enunciado) de un razonamiento.

conectiva
Operador lógico.

contradicción
Un enunciado y su negación.

contraejemplo
Interpretación que hace verdaderas las premisas y falsa la conclusión.

deducción natural
Método de validación muy intuitivo basado en nueve reglas de inferencia.

enunciado
Formalización de una frase declarativa (no necesariamente simple).

interpretación
Asignación de un valor de verdad a cada átomo de un enunciado.

literal
Átomo o negación de un átomo.

premisa
Frase (enunciado) dada como información previa en un razonamiento.

razonamiento
Secuencia de frases (enunciado) tal que, de la aceptación de las primeras, parece desprenderse la última.

regla de resolución
Regla derivada de la deducción natural y método para validar o refutar razonamientos.

regla de inferencia
Regla que permite obtener nuevos enunciados a partir de otros.

teorema
Enunciado demostrable sin premisas.

Bibliografía

Bibliografía básica

Antón, A.; Casañ, P. (1986). *Lógica matemática (Ejercicios I. Lógica de enunciados).* Valencia: NAU Llibres.

Arenas, L. (1996). *Lógica formal para informáticos*. Madrid: Díaz de Santos.

Bibliografía complementaria

Deaño, A. (1993). *Introducción a la lógica formal* (ed. original 1974). Madrid: Alianza Editorial (Alianza Universidad Textos, 11).

Garrido, M. (1995). *Lógica simbólica* (ed. original 1974). Madrid: Tecnos.

Sancho, J. (1990). *Lógica matemática y computabilidad.* Madrid: Díaz de Santos.

Suppes, P.; Hill, S. (1986). *Introducción a la lógica matemática.* Barcelona: Reverté.